(*N.d.R. Reimpaginazione maggio 2013*).

IDEE PER IL LIBRO DI C. F. MANARA E M. MARCHI SUI NUOVI PROGRAMMI DI MATEMATICA PER IL BIENNIO DELLA SCUOLA MEDIA SUPERIORE.

INTRODUZIONE

Si de quadam re dicitur: "Ecce hoc novum est", iam enim praecessit in saeculis, quae fuerunt ante nos." Eccl. I, 10."

Il n'y a de nouveau que l'oublié.

1 - L'impresa di determinare la data in cui in Italia si incominciò a parlare di riforma della scuola è praticamente disperata. Pensiamo che tale data possa essere fatta risalire ai primi giorni dell'Unità d'Italia, ma certamente sarà possibile risalire ancora più indietro nel tempo. È noto che, nel nostro secolo, il fascismo fece varie riforme della scuola, cercando di dar prova della propria capacità di imprimere alla Nazione un carattere specifico che questa (a suo parere) non aveva. Dopo la seconda guerra mondiale, il ristabilimento della democrazia portò, come necessaria conseguenza, le discussioni sulla riforma della scuola. Negli ultimi decenni furono fatte alcune di queste riforme, tra diatribe ideologiche interminabili; ma la scuola secondaria superiore è ancora oggi in attesa di una riforma globale definitiva; questa è stata ritardata indefinitamente da discussioni e polemiche che hanno fatto appello ad argomentazioni tratte dai campi più vari: sociologia, filosofia, diritto, dottrina dello Stato, psicologia, pedagogia e chi più ne ha più ne metta. È noto che uno degli argomenti più lungamente disputati è stata la struttura della scuola media superiore e l'articolazione dei suoi cinque anni. Tale questione, come è noto, è stata decisa di fatto in via amministrativa recentemente, con l'emanazione delle bozze di programmi del primo biennio. Il che ha fatto protestare molti che difendevano la tesi opposta, dell'unità del quinquennio, perché la decisione è stata (forse giustamente) interpretata come un atto d'imperio dell'autorità amministrativa in favore della divisione del quinquennio in un biennio propedeutico ed in un triennio successivo, la cui natura è ancora oggi oggetto di accanite discussioni. In epoca successiva sono comparse anche delle bozze di programma per le varie materie di insegnamento; ed anche questo fatto ha provocato polemiche, perché l'autorità amministrativa ha dichiarato recentemente che tali programmi saranno adottati dalle scuole sperimentali; ma si obietta giustamente da varie parti che il concetto di sperimentazione implica anche un bilancio consuntivo ed un giudizio finale, di adozione o di rigetto delle idee che hanno ispirato la sperimentazione stessa; ma che nel nostro Paese ben poche pretese sperimentazioni hanno poi dato luogo ad un bilancio consuntivo; questo è stato fatto da varie parti in causa, ed ovviamente con diversi criteri e diversi giudizi, ma le cose sono poi sempre rimaste come stavano. Pertanto è giustificato il timore che questi programmi, presentati come sperimentali per qualche scuola, diventino in seguito i programmi ufficiali di tutte le scuole secondarie italiane, senza che sia possibile valutarne serenamente il significato e la portata.

2 - Non è nostra intenzione prendere parte qui ed in questa sede alle polemiche di carattere politico ed ideologico che sono ancora in atto su questi argomenti. Questo nostro lavoro vorrebbe invece servire come aiuto ai Colleghi che lavorano nella scuola per comprendere il significato delle riforme prospettate, e cercare di metterle in atto nel modo migliore qualora esse divenissero definitive. E dicendo nel modo migliore intendiamo dire che ogni insegnante dovrebbe rendersi ben conto del sottofondo culturale ed ideologico che ha ispirato i programmi, e costruire il proprio lavoro didattico in modo autonomo, facendo sì che l'insegnamento impartito non si riduca ad un semplice accumulo di nozioni (anche se utili o addirittura indispensabili), ma provochi nel discente una appropriazione delle idee fondamentali, che faccia crescere la sua personalità, inducendolo a costruire una propria cultura, cioè un proprio modo di vedere razionalmente il mondo, di apprendere, di giudicare e di operare per il bene della società.

3 - Crediamo che un'impresa di questo tipo sia particolarmente interessante nei riguardi della matematica: riteniamo infatti che sia utile, per non dire addirittura necessario, dare di questa dottrina una giusta immagine, che non sempre alberga nella mente della maggioranza degli allievi ed anche di coloro che la utilizzano ai fini pratici. Infatti molti considerano la matematica come una dottrina di puro servizio, che è utile per tanti scopi, ma che ha ben poco (per non dire nessuno) significato culturale; di conseguenza la

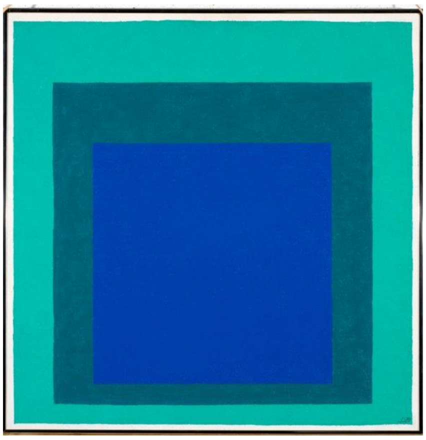
matematica viene spesso insegnata in vista delle possibilità di calcolo e di conseguimento di informazioni, senza cercare di spiegarne il significato epistemologico. Se a questa concezione di aggiunge anche la difficoltà dell'impiego del simbolismo (che per qualche intelligenza costituisce un ostacolo molto duro all'apprendimento) si comprende anche la tentazione di fare dell'insegnamento della matematica un puro addestramento ai calcoli ed all'applicazione delle procedure, non comprese e non motivate. La situazione ci pare aggravata oggi dall'esistenza dei mezzi elettronici di calcolo e di elaborazione dell'informazione; mezzi la cui esistenza ha fatto sperare a molti di poter evitare la fatica della comprensione e dell'approfondimento.

4 - In questo volume il Lettore troverà anche una breve storia delle recenti proposte di riforma della scuola. Questa parte ci è sembrata indispensabile perché gli insegnanti si rendano conto del fatto che anche una materia come la matematica ha un significato culturale, perché deve contribuire alla formazione della mente e del carattere del cittadino. Pertanto anche l'analisi dell'evoluzione storica della nostra scuola e delle vicende del suo adeguamento alla realtà nazionale che cambia possono essere importanti per l'insegnamento, anche delle materie che si presumono astratte e distanti dalla realtà materiale e storica. Q.B.F.F.Q.S (Quod bonum felix faustumque sit).

SCHEMA PROVVISORIO.

[CONVERRÀ RIPORTARE ALL'INIZIO DEL CAP. 1 I PROGRAMMI NELLA VERSIONE UFFICIALE].

AVVERTENZE: Le frasi scritte in lettere tutte maiuscole e messe tra parentesi quadre [ ] sono autocommenti oppure annotazioni di idee da sviluppare o di citazioni da riportare.



Josef Albers (1976). Homage to the Square

Cap. I - MATEMATICA E MATEMATIZZAZIONE.

1 - I programmi di insegnamento della matematica nell'età adolescenziale si fondano sulla concezione e sull'idea che di questa scienza si fa il legislatore o i suoi consiglieri e sulla concezione che si ha del compito della scuola. Questo condizionamento sussiste, anche se non è stato esplicitamente voluto o dichiarato. La nostra intenzione non è tanto quella di sostenere o di combattere l'una o l'altra delle concezioni che sono state avanzate, o delle varie teorie epistemologiche e pedagogiche che sono in cerca di consensi e di adesioni, ma piuttosto quella di rendere evidenti quei condizionamenti, e di mostrare, nei limiti del possibile, su quali idee si fondano certe posizioni e certi enunciati dei programmi. In tal modo speriamo di aiutare gli insegnanti a scegliere consapevolmente una linea didattica ed a costruire il proprio personale programma di insegnamento, che sia il più possibile autonomo e cosciente, anche se non mai in contrasto con i contenuti di quello ministeriale.
Abbiamo parlato di concezione dell'insegnamento che si manifesta nei programmi: un caso tipico della evidenza di questo modo di vedere l'insegnamento è costituito dal noto abbinamento tra matematica ed informatica che figura nell'intestazione stessa dei programmi. È chiaro che la discussione su qualunque argomento non ha significato ragionevole se non si precisano i termini del discorso e gli scopi della discussione stessa. Ritorneremo presto sulla precisazione del concetto di "matematica" e dei termini che a questa scienza si riattaccano (per esempio "matematizzazione"); per quanto riguarda l'informatica ci limitiamo ad osservare che, così come la si è voluta introdurre nelle scuole dell'ordine secondario in Italia, essa ha assunto i caratteri di un addestramento all'uso degli strumenti elettronici di elaborazione dell'informazione, che non ha avuto alcun carattere formativo; la cosiddetta "campagna per l'informatizzazione" in molti casi si è ridotta ad insegnare certi comportamenti e un vocabolario di voci barbare, che forse nelle intenzioni di coloro che le usano vorrebbero appartenere alla lingua inglese. Le famiglie, stordite dalle campagne commerciali pubblicitarie, hanno preteso a gran voce che si insegnasse l'informatica nella scuola, sperando di aprire così ai propri figli un futuro di successi professionali. Non sono poche le famiglie che hanno acquistato una macchina (ne conosciamo di quelle che ne hanno acquistate due) per i propri figli. In moltissimi casi la macchina, dopo un facile entusiasmo iniziale, è utilizzata per video-giochi; a nostro parere infatti è mancato totalmente lo sforzo di dare a queste informazioni ed a questi addestramenti il carattere formativo per l'intelletto che dovrebbe essere lo scopo di ogni insegnamento. Da molti genitori il computer è stato visto come la macchina che rende i figli intelligenti; e purtroppo questa visione è stata confortata anche dalle parole di certi pedagogisti, che si sono dati ad esaltare le macchine ed a dichiarare che, con l'impiego e la familiarizzazione di queste, i nostri figli saranno molto più intelligenti di noi. Questo giudizio è stato fondato sul fatto che i giovani battono quasi sempre i loro padri ai video-giochi; ma sarebbe avventato misurare l'intelligenza sulla scorta della abilità ai video-giochi, anche se qualche pedagogista ingenuo ha adottato questi criteri. Noi siamo invece del parere che (secondo l'aneddotica) è già stato espresso da Euclide (al quale neppure i pedagogisti più avanzati potranno negare l'intelligenza); secondo tale parere, non esiste una "via regia" per l'apprendimento delle materie concettuali: al contrario, ognuno deve fare un proprio sforzo autonomo per appropriarsi dei concetti di una dottrina, e non esistono ricette miracolose o macchine pretese "intelligenti" che rendano intelligenti i propri utilizzatori. Ciò tuttavia non cancella il ruolo fondamentale che la scuola ha e deve avere per aiutare tutti i cittadini nella loro formazione intellettuale.

2 - A scanso di ogni fraintendimento, e per evitare ogni interpretazione interessata del nostro pensiero, dichiariamo qui apertamente che, con le parole che precedono, non intendiamo affatto negare l'importanza della rivoluzione tecnologica e culturale che si è verificata con l'invenzione dei mezzi elettronici di calcolo e di elaborazione dell'informazione; e meno ancora intendiamo sostenere che la scuola debba ignorare tale rivoluzione. Anzi noi pensiamo che la scuola debba tener conto di questi fatti e debba preparare i nostri figli a vivere nell'epoca dei computer; ma proprio per questo pensiamo che la scuola debba insegnare a dominare questi mezzi tecnologici, in modo che essi siano sempre i servi della nostra intelligenza, e non diventino invece i nostri padroni, e la scusa per l'inerzia intellettuale. Noi pensiamo infatti che proprio l'esistenza di questi mezzi e la necessità di convivere con essi giustifichino la ricerca di un insegnamento che sia diretto sempre più nella direzione della formazione intellettuale rigorosa, piuttosto che in quella dell'addestramento all'impiego delle tecnologie. Come cercheremo di far vedere nel seguito, la scienza in generale, e la matematica in particolare, ha sempre registrato dei progressi fondamentali in seguito all'invenzione di nuove tecniche di espressione e di calcolo: basti pensare al progresso che la matematica ha vissuto dopo

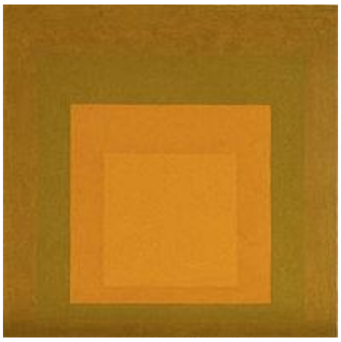
l'invenzione dei metodi della geometria analitica, oppure con la invenzione del simbolismo algebrico; ma sarebbe forse ingenuo identificare la conoscenza delle idee fondamentali della matematica alla manovra spedita del simbolismo algebrico, oppure la conoscenza della geometria alla manovra spedita delle formule e delle procedure della geometria analitica. Queste sono conoscenze ormai necessarie per comprendere la matematica di oggi, ma sarebbe ingenuo ridurre questa scienza alla tecnica dei calcoli e delle procedure. Siamo ben consci del fatto che purtroppo molti tra quelli che insegnano matematica fanno di queste confusioni; ma proprio per questa ragione non vorremmo che l'equivoco diventasse ancora più grave in relazione al maneggio ed all'utilizzazione delle nuove macchine.
Ritorneremo su questi argomenti nel Cap. V, quando parleremo dell'algebra e delle problematiche essenziali dell'insegnamento di questa materia. [RIPRENDEREMO IL DISCORSO SUGLI "ARTIFIZI", CHE GIUSTAMENTE FIGURA NEI PROGRAMMI].

3 - Qui vorremmo invece fare qualche riflessione a proposito del significato dell'insegnamento della matematica. Non presumiamo di poter risolvere in poche pagine il problema di dare una definizione completa ed esauriente del pensiero matematico, che oggi si presenta quanto mai variegato e pluriforme; finora crediamo di aver messo in chiaro la nostra convinzione che questo non si riduce alla abilità di manovra di certi simbolismi o di certi meccanismi, anche se tali abilità non possono oggi essere assenti.
A questo proposito si sente spesso parlare di "matematizzazione della realtà". Si potrebbe dare a questo sintagma il significato di procedura per utilizzare gli strumenti della matematica per rappresentare la realtà che noi osserviamo e manipoliamo. Questa espressione potrebbe forse essere precisata parlando di matematica che può essere impiegata come chiave di lettura della realtà. Con questa espressione vorremmo richiamare la celebre frase di Galileo, il quale affermò, in un passo del "Saggiatore", che "il gran libro dell'universo è scritto in caratteri matematici":"… *la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto davanti a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intendere la lingua e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto…."*
Per precisare ulteriormente il nostro pensiero, vorremmo identificare nei momenti di astrazione, concettualizzazione, simbolizzazione e deduzione i momenti in cui si articola l'impiego della matematica nella conoscenza del reale. Si potrebbe anche dire che il successo delle scienze fisico matematiche nella conoscenza della realtà materiale e nel dominio delle tecnologie è, almeno in parte, attribuibile alla particolare chiarezza ed efficacia con cui la matematica realizza questi momenti della procedura fondamentale della costruzione di una immagine scientifica della natura. E qui con il termine "scientifica" intendiamo indicare una conoscenza che sia fondata, spiegata, giustificata e coerentemente strutturata in teorie che partono da ipotesi e giungono con rigore alle conclusioni, da verificare nella osservazione della realtà.

4 - Altri aspetti di questa visione matematica della realtà saranno trattati in seguito; qui ci interessa rilevare la parte importantissima che è rivestita dall'immaginazione della costruzione di una teoria matematica della realtà materiale. Ciò appare evidente nella costruzione della geometria, come vedremo meglio in seguito; ma anche nelle costruzione di una teoria tipicamente fisica l'apporto dell'immaginazione è quasi sempre rilevantissimo. Valga, tra i tanti possibili, l'esempio della teoria cinetica dei gas; teoria nella quale le molecole vengono anzitutto immaginate come sferette perfettamente elastiche e di volume trascurabile, e la variabili macroscopiche del gas in questione vengono spiegate sempre in termini di proprietà della folla di molecole così immaginate; le discrepanze della realtà dalle conseguenze tratte matematicamente da queste ipotesi (che si concretano in immagini) vengono di volta in volta affrontate con ritocchi dell'immagine. La quale viene abbandonata (per esempio per passare a teorie quantistiche di tipo totalmente diverso) soltanto quando l'evidenza sperimentale costringe a costruire dei modelli del tutto diversi da quelli ottenuti con la rielaborazione fantastica dell'esperienza macroscopica.
Considerazioni analoghe si potrebbero svolgere a proposito del concetto di proporzionalità; infatti, nella Meccanica e nella Fisica elementari, il primo schema che viene escogitato per dare un'immagine quantitativa dei fenomeni è quello della legge lineare; questo atteggiamento è ovviamente giustificato quasi sempre dai primi dati grezzi dell'esperienza, e dalla immagine che la nostra fantasia ci presenta sulla costituzione della materia o in generale della struttura dei fenomeni che si studiano. Tuttavia è noto che

questo abito mentale spesso costituisce anche un limite per il tentativo di escogitare delle leggi quantitative che si adeguino meglio alla realtà che si vuole conoscere.

5 - Osserviamo infine che la utilizzazione degli strumenti matematici nella costruzione di un'immagine coerente della realtà materiale permette l'applicazione metodica delle procedure di analisi e di sintesi che sono state codificate da Euclide e che ancora oggi (talvolta sotto nomi strani ed in lingua straniera) rimangono le procedure fondamentali per la ricerca della verità e per la soluzione dei problemi.
In definitiva quindi la procedura per dimostrare proposizioni non conosciute (teoremi) oppure per rispondere a determinate domande, se vuole essere rigorosa, deve essere espletata soltanto con applicazione delle leggi logiche; con l'operazione di analisi si deduce, e quindi si determinano condizioni solo necessarie; la ricerca e l'accertamento delle condizioni sufficienti è affidata alla sintesi. Nell'atteggiamento moderno tali procedure (valide in ogni caso) si riducono spesso alla applicazione corretta delle leggi sintattiche dei simboli adottati per rappresentare i concetti e le loro relazioni. Ma ricordiamo esplicitamente che la adozione del simbolo è soltanto uno strumento molto valido ma, a rigore, non strettamente necessario per la deduzione e la ricerca; a nostro parere infatti la geometria greca rimane ancora uno splendido monumento di ciò che la mente umana può costruire con la pura opera della logica, anche senza possedere gli strumenti simbolici che caratterizzano la matematica di oggi.



Josef Albers (1965). Homage to the Square.

Cap. II - QUESTIONI DIDATTICHE.

1 - Ci pare chiaro che la didattica della matematica sia in qualche modo influenzata dalla concezione che si ha di questa scienza. Nel precedente Capitolo abbiamo cercato di presentare la nostra concezione della matematica come uno dei pilastri portanti della cultura scientifica di oggi, e quindi del carattere profondamente formativo che l'insegnamento di questa materia deve avere per i discenti. Tenendo fede a ciò che abbiamo detto nell'introduzione di questo volume, possiamo tentare di comprendere la concezione che gli estensori dei programmi hanno nei riguardi della matematica. Ci sembra infatti che dalla lettura dei programmi si possa arguire con una certa probabilità la concezione culturale di chi li ha formulati. Riteniamo utile ricordare che, anche nell'insegnamento della matematica, nascono, prosperano e muoiono le mode, analogamente a ciò che avviene per l'abbigliamento femminile. Ricordiamo la moda dell'insiemistica, che ha imperversato qualche decennio fa, la moda della logica formale, più recente della precedente, la moda dei sussidi audiovisivi e delle macchine per insegnare, le mode riguardanti certe strutture algebriche (gruppi e simili) ed oggi la moda dell'informatica, della quale abbiamo già parlato e sulla quale ritorneremo nel seguito. A nostro parere, alcune di queste mode hanno la loro origine in un equivoco riguardante la psicologia dell'apprendimento: infatti si è creduto che i concetti veramente generalissimi (ma per questo anche molto astratti) e semplici fossero per ciò stesso i più facili da apprendere; e conseguentemente si è pensato anche che l'insegnamento di questi concetti, dei linguaggi tecnici relativi e del simbolismo corrispondente potessero costituire un fondamento solido e limpido per la costruzione dell'edificio della matematica nelle menti dei discenti. Non si nega che questi concetti (come quello di insieme, per esempio) siano generalissimi e possano essere assunti come fondanti del pensiero matematico. Tuttavia, a nostro parere, la costruzione di un sistema di concetti diventa efficace e formativa se parte dal vissuto concreto del discente; da questo dovrebbe nascere la costruzione dei concetti; e l'operazione importantissima della costruzione del simbolismo e della sua sintassi dovrebbe prendere le mosse da questo vissuto concreto; tuttavia noi pensiamo che il simbolismo, e la struttura concettuale che lo fonda, siano appresi e fatti propri dal discente quando questi ne scopre la potenza di sintesi delle cose conosciute e di scoperta di altre verità. Altrimenti il simbolismo si presenta come un inutile sovraccarico di convenzioni e di regole non giustificate. In questo ordine di idee, per esempio, il simbolismo e la nomenclatura tecnica dell'insiemistica, così come è tradizionalmente presentata, riguardano contenuti talmente elementari ed evidenti che il discente non ne vede la necessità e neppure ne intravede la utilità per scoprire cose nuove e relazioni sconosciute.
Ritorneremo su queste questioni nei prossimi capitoli, in occasione delle analisi che faremo a proposito dell'insegnamento della logica. Qui ci limitiamo a presentare quelli che i programmi chiamano "Obiettivi di apprendimento.

2 - Tali obiettivi sono elencati nel modo seguente:
1. individuare proprietà invarianti per trasformazioni elementari;
2. dimostrare proprietà di figure geometriche;
3. utilizzare consapevolmente le tecniche e le procedure di calcolo studiate;
4. riconoscere costruire relazioni e funzioni;
5. matematizzare semplici situazioni riferite alla comune esperienza e a vari ambiti disciplinari;
6. comprendere e interpretare le strutture di semplici formalismi matematici;
7. cogliere analogie strutturali e individuare strutture fondamentali;
8. riconoscere concetti e regole della logica in contesti argomentativi e dimostrativi;
9. adoperare i metodi, i linguaggi e gli strumenti informatici introdotti;
10. inquadrare storicamente qualche momento significativo dell'evoluzione del pensiero matematico.

Prima di analizzare le possibili sorgenti di questo elenco di obiettivi si potrebbe osservare che nell'enunciato sub 1 non si dice di chi sono le proprietà di cui si parla; ma un facile controllo del contesto porta a concludere che si tratta di proprietà di figure geometriche. Pertanto le trasformazioni di cui si parla sono ovviamente delle trasformazioni geometriche, e questo enunciato si riattacca forse in modo naturale a quella "geometria delle trasformazioni" di cui si fa cenno nei programmi di matematica delle scuole dell'ordine elementare, e della scuola media unica E la presenza di queste frasi nei programmi denuncia probabilmente un tentativo (forse un po' maldestro) di tener conto delle idee di Felix Klein e del suo "programma di Erlangen".
Qualche altra osservazione si potrebbe fare a proposito del termine "struttura" che si incontra sub 6 e sub 7. Forse qualche precisazione potrebbe aiutare i volonterosi lettori in una interpretazione più precisa: si tratta

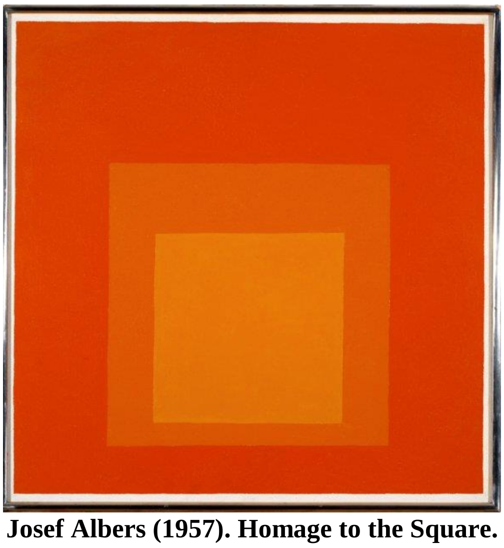
forse di strutture algebriche? e che cosa significa la frase "interpretare le strutture"? Ma non insistiamo in questa ricerca minuta di significati di termini e di frasi, perché ci interessa analizzare questi enunciati da un altro punto di vista, e precisamente alla luce del significato e dello scopo del lavoro didattico che si vuole svolgere.
Una interpretazione possibile è che il discente già conosca in modo esplicito qualche struttura algebrica classica (gruppo, anello, campo...) e che, di fronte a certe procedure utilizzate per esporre dei teoremi o per risolvere dei problemi, sappia identificare a quali strutture appartengano gli strumenti utilizzati; e forse sappia anche giudicare se tali strumenti appartengano ad altre strutture algebriche e possano essere utilizzate nel contesto in questione. Se siamo nel vero, si tratta dunque di una discussione e valutazione degli strumenti adottati, e di una loro classificazione nell'ambito dei concetti dell'algebra e del loro vocabolario.

3 - Per chiarire ulteriormente il nostro pensiero vorremmo dire che la impostazione stessa che si fonda su un elenco di obiettivi ci sembra richiedere qualche precisazione. A nostro parere infatti lo scopo dell'insegnamento dovrebbe essere quello di far acquisire una certa formazione culturale, che si concreta nel possesso di certi concetti, delle loro motivazioni, e dei loro collegamenti. Se si adotta questo punto di vista le abilità qui elencate (e forse molte altre ancora) diventano delle conseguenze e degli effetti di una certa impalcatura mentale conseguita, e posseduta con sicurezza dal discente. D'altra parte la scelta di elencare obiettivi invece che concetti può far cadere qualche insegnante nella tentazione di impostare il proprio lavoro più con carattere addestrativo che con impegno autenticamente formativo; e questa tentazione può anche essere favorita dal comportamento del ministero della P.I. che ripetutamente e costantemente, nei temi scritti di maturità, propone dei problemi appartenenti a categorie ben precisate e ripetitive. La cosa non è per nulla nuova, perché per decenni nei temi scritti della maturità scientifica si presentava la discussione di una equazione quadratica i cui coefficienti contenevano un parametro reale; la cosa era diventata talmente certa che molto spesso certe preparazioni in matematica consistevano nel memorizzare certi metodi di discussione, ormai perfezionati e quasi automatizzati, in modo che qualunque candidato potesse adottarli con successo, anche senza capire gran che del problema e del significato delle operazioni e delle procedure che applicava con tanto zelo e tanta precisione. La cosa si ripete quasi costantemente anche oggi: infatti i temi scritti di maturità scientifica richiedono quasi sempre l'applicazione di regole standardizzate per rispondere a questioni che appartengono a ben pochi tipi: analisi di una funzione, ricerca dei suoi massimi e minimi, calcolo di una certa area mediante determinazione del valore di un certo integrale limitato. Riteniamo che il pericolo di un insegnamento puramente addestrativo sia reale e che sia presente anche a chi ha formulato gli obiettivi di cui stiamo parlando: infatti, per esempio, sub 3 si può leggere l'avverbio "consapevolmente", relativo all'utilizzo delle tecniche e procedure di calcolo. Ma, come abbiamo già detto, lo stesso fatto di aver posto un elenco di obbiettivi invece di un elenco di concetti all'inizio dei programmi dimostra una concezione dell'insegnamento che può ragionevolmente dar luogo a qualche perplessità.

4 - La perplessità di cui abbiamo detto ingrandiscono ulteriormente quando teniamo presenti alcune mode pedagogiche che accade spesso di incontrare, soprattutto a proposito della matematica, materia che richiede impegno e costanza e che si presenta quindi a mode che sbandierano facilità di apprendimento e sicurezza di risultati. Accade per esempio di vedere presentate ciclicamente le idee di quello che viene chiamato spesso "Insegnamento per problemi". Rileviamo di passaggio che queste idee non hanno neppure il pregio della novità, che invece viene proclamata dai loro difensori: infatti già nel secolo XVIII il grande matematico A. Clairaut scrisse un piccolo libro intitolato "Elements de Géométrie", in cui presenta la geometria appunto partendo da problemi concreti; egli giustifica la sua procedura nella prefazione, esprimendo giudizi negativi sull'insegnamento tradizionale della geometria; insegnamento che, secondo il suo parere, è abitualmente troppo staccato dalla realtà e quindi dall'interesse del discente. Analoghe posizioni sono state prese dalla didattica dell'epoca post-illuministica, che ha cercato di mettere in pratica le idee dell'illuminismo enciclopedista, nettamente contrario alle scienze considerate come astratte, e dedito invece alla esaltazione della scienza al servizio della tecnica e del dominio del mondo materiale. Si direbbe che motivazioni dello stesso tipo siano alla base anche di certe correnti di didattica della geometria, che proclamano la necessità di partire dalla geometria solida, a tre dimensioni, prima di quella a due. A proposito di queste idee, e di altre analoghe, vorremmo dire che vediamo il lato positivo nel voler svegliare la curiosità e quindi l'interesse del discente in ogni campo del sapere, e quindi anche nel campo della matematica. Ma che l'insegnamento per problemi deve avere uno scopo, che non può limitarsi ad essere la risposta a curiosità limitate e, per così dire, locali, ma dovrebbe sempre mirare a conseguire una sistemazione teorica e strutturata delle nozioni che

così vengono acquisite. Altrimenti si darebbe ragione a quelle menti limitate, le quali sostengono che occorre insegnare soltanto la matematica "che serve"; ma non sempre sono capaci di indicare chiaramente che cosa si intenda per questo "servizio" che la matematica dovrebbe rendere. Noi pensiamo invece che la scuola abbia un servizio insostituibile da rendere alla società: questo servizio consiste nel trametterre da una generazione all'altra una cultura, cioè un modo razionale di vedere le cose e di servirsene, con l'ausilio della scienza e della tecnica. Sarebbe poco intelligente adottare una delle due posizioni estreme, che periodicamente fanno capolino nei programmi dei pedagogisti: di una abbiamo già parlato a proposito dell'insiemistica e della pretesa di imporre ai giovani discenti delle strutture concettuali eccessivamente astratte e staccate dalla realtà del loro vissuto esistenziale. L'altra consisterebbe nel lasciare briglia sciolta allo spontaneismo disordinato, correndo dietro alla soluzione di singoli problemi e rinunciando a dare, prima o poi, una sistemazione unitaria teorica alle idee che eventualmente fossero nate. A nostro parere, una giusta azione didattica dovrebbe mirare a svegliare l'interesse del discente, a non mortificare la sua eventuale capacità creativa, ma anche a dare una solida struttura teorica portante. Se è vero che, come anche Newton diceva, noi vediamo lontano perché siamo "...dei pigmei sulle spalle di giganti", (1) sarebbe poco saggio rinunciare a questo aiuto che le generazioni precedenti ci danno, senza tuttavia tralasciare ogni sforzo da parte nostra per dare un piccolo contributo al sapere comune dell'umanità.

5 - A ciò che abbiamo detto finora vorremmo aggiungere che l'impresa di insegnare "per problemi", se vuole essere compiuta in modo serio, richiede da parte dell'insegnante una cultura generale ed una conoscenza della materia che forse non sempre le nostre università conferiscono ai laureati in matematica, e meno ancora a quelli in informatica ai quali - purtroppo - sarà molto probabilmente aperto l'insegnamento della matematica nelle scuole dell'ordine secondario superiore. Una osservazione analoga, e per una lacuna ancora più grave, può essere fatta a proposito della richiesta sub 10, la quale vorrebbe che l'allievo "sappia inquadrare storicamente qualche momento significativo dell'evoluzione del pensiero matematico"; sarebbe certo una gran bella cosa, ma dubitiamo che lo sappia fare l'insegnante medio; infatti le nostre università conferiscono molte conoscenze di carattere specialistico e specifico, e spesso albergano anche dei corsi di storia della matematica. Ma dubitiamo che conferiscano quella cultura e quel senso del significato culturale della matematica che sarebbero necessari per formare in questo senso gli allievi. Si tratta purtroppo, ancora una volta, di una di quelle belle intenzioni che i nostri legislatori affermano molto solennemente, magari con la promessa di adeguate strutture dirette allo scopo, e poi naufragano miseramente nella palude delle velleità non condotte a compimento. [OCCORRE SCEGLIERE TRA L'INSEGNARE A MANOVRARE CERTI CONCETTI E CERTI FORMALISMI AI FINI PRATICI, ANCHE SENZA CAPIRE GRAN CHE, E L'INSEGNARE LE STRUTTURE CONCETTUALI FONDAMENTALI, ANCHE RINUNCIANDO A QUALCHE CONOSCENZA SPECIFICA].



Josef Albers (1957). Homage to the Square.

Cap. III - LA GEOMETRIA

1 - È noto che delle correnti di pensiero abbastanza recenti hanno lanciato la moda della svalutazione della geometria; alcuni hanno addirittura annunciato la morte della geometria come dottrina matematica e quindi hanno per così dire delegittimato la sua presenza nella didattica e nella manualistica. Si possono intravvedere certi echi di queste sentenze di morte in alcuni atteggiamenti ancora oggi correnti presso molti che si occupano di didattica. Da parte nostra non condividiamo questi giudizi e quindi gli atteggiamenti didattici che ne conseguono. Il nostro parere ci pare confortato dalla Storia del pensiero scientifico: pensiamo infatti che il primo trattato di scienza degno di questo nome che la Storia ricordi, e precisamente il trattato degli "Elementi" di Euclide, stia a testimoniare anche il fatto che la geometria si presenti come il primo momento di conoscenza rigorosa e scientifica della realtà materiale, opportunamente idealizzata. Ci pare infatti di poter dire che, in certo modo, il trattato euclideo si presenti come il "primo capitolo della fisica", cioè il primo esempio storico in cui le proprietà degli oggetti che noi osserviamo e che sperimentiamo e manipoliamo sono oggetto di opportune idealizzazioni e vengono in parte almeno dedotte rigorosamente da ipotesi esplicitamente enunciate. In questa luce crediamo di poter dire che la geometria dovrebbe ancora oggi essere considerata come una insuperabile palestra di pensiero rigoroso; pensiamo infatti che sia esemplarmente formativo il fatto che si abitui il giovane a dimostrare rigorosamente certe cose in forza di certe premesse o di certe ipotesi: quando si dimostra per esempio che "...in forza delle ipotesi, un certo punto deve essere dato dall'intersezione di certe dure rette che si sanno costruire", oppure che "…certi tre punti debbono necessariamente appartenere ad una data retta" si educa, tra l'altro, all'accettazione della necessità della conseguenza logica, all'accettazione della potenza della logica nella conoscenza della realtà, anche materiale; potenza che la scienza utilizza quotidianamente e che è uno dei cardini della conoscenza razionale del mondo.

2 - Nell'ordine di idee che stiamo qui sviluppando, quindi, la geometria costituisce il primo momento in cui si realizzano quei momenti di costruzione di una conoscenza razionale di cui abbiamo detto nel Cap. I: astrazione, concettualizzazione, deduzione rigorosa. Infatti è utile osservare che la costruzione degli oggetti della geometria avviene con un'operazione di astrazione che richiede all'operatore di ignorare la costituzione chimica e le proprietà fisiche degli oggetti, per concentrare la propria attenzione soltanto sulle proprietà geometriche. In questo ordine di idee le immagini che la geometria si forma degli oggetti osservati sono frutto di una elaborazione fantastica dei dati dei sensi; elaborazione che non è arbitraria, cervellotica né contradditoria con le sensazioni, ma anzi è suggerita da queste, e fa da supporto alla concettualizzazione; questa giunge a formulare, in termini linguistici precisi, le definizioni degli oggetti (quando ciò sia possibile) o le relazioni che li costituiscono logicamente (con le definizioni implicite). Tali definizioni e relazioni sono poi il punto di partenza per la deduzione rigorosa che consegue. In questo ordine di idee quindi la geometria non è soltanto una raccolta di termini tecnici convenzionali per rappresentare gli oggetti idealizzati di cui si diceva, anche se l'educazione alla precisione della designazione fa pure parte di un'opera di formazione intellettuale che è quanto mai necessaria nel mondo di oggi, nel quale impera l'abitudine alla confusione delle terminologie e delle idee. Ma la geometria può servire a ben altro: precisamente noi pensiamo che la geometria possa servire come inizio ad una educazione alla obbiettività, che è fondamentale per la formazione scientifica dei giovani. Infatti, in modo quasi inconscio, il discente, nel momento stesso della astrazione che costruisce l'oggetto fantastico delle sue considerazioni, deve essere condotto a prescindere non soltanto, come si è detto, dalla costituzione fisica e chimica dell'oggetto, ma anche dalla sua posizione rispetto ad un dato osservatore: egli deve quindi dare una descrizione dell'oggetto che sia indipendente dalla propria posizione rispetto ad esso, e prescinda dalla manipolazioni che eventualmente si possano eseguire su di esso, purché beninteso tali manipolazioni si concretino in movimenti rigidi. Pertanto la considerazione delle trasformazioni geometriche, di cui fa cenno il programma, costituisce soltanto una presa di coscienza esplicita e precisa di ciò che inconsciamente noi facciamo quando costruiamo gli oggetti della geometria. Ci pare chiaro che, impostando l'insegnamento secondo queste idee, si avvia il discente a considerarsi soltanto come uno dei tanti possibili osservatori, ed a descrivere l'oggetto ed enunciarne le proprietà in modo tale che sia valido per ogni osservatore possibile dell'oggetto stesso. La ricerca e la definizioni delle proprietà invarianti delle figure sono quindi soltanto un caso particolare, ed un modo particolare per codificare ed esplicitare in forma riflessa e cosciente ciò che necessariamente deve essere fatto fin dall'inizio, nella stessa costruzione degli oggetti di pensiero. [LA GEOMETRIA, CLASSICAMENTE INTESA, OFFRE IL VANTAGGIO DI NON RICHIEDERE SIMBOLISMI SPECIFICI COME L'ALGEBRA, E QUINDI PUÒ

EVITARE QUELLE ALLERGIE DA RIGETTO DEI SIMBOLI CHE SONO PIÙ FREQUENTI DI QUANTO NON SI PENSI. MA L'ALLENAMENTO RAZIONALE VIENE FATTO LO STESSO E PERMETTE DI SEPARARE IL LAVORO VERAMENTE IMPORTANTE DELLA LOGICA DAL PURO ADDESTRAMENTO ALLE LEGGI DELLA SINTASSI DEI SIMBOLI. ANALISI E SINTESI].

3 - Osserviamo inoltre che nella geometria, almeno nella geometria piana classica, l'operazione di simbolizzazione è visibilmente molto facile ed intuitiva, perché si avvale delle figure, invece di ricorrere a simboli convenzionali, come avviene nell'algebra. Questo fatto da una parte facilita la costruzione dei concetti e dall'altra può aiutare l'insegnante nella sua opera di formazione scientifica, qualora si abbia cura di mostrare non soltanto l'efficacia di questa simbolizzazione, ma anche i suoi limiti, che del resto già Platone dimostra di conoscere. A distanza di secoli, David Hilbert affermava che "le figure sono formule disegnate"; questa affermazione può essere interpretata osservando che non necessariamente in matematica la deduzione deve essere eseguita con l'impiego della simbologia algebrica ed analitica, e con il rispetto delle regole di sintassi di tale simbologia. Pertanto nella geometria l'operazione di deduzione viene eseguita con l'impiego degli strumenti della logica classica, e del linguaggio comune; quindi l'impresa della costruzione dell'edificio razionale deduttivo non dipende dall'addestramento all'uso di un simbolismo, che può essere anche ostico a qualcuno (come abbiamo detto) ma soltanto dalla capacità mentale di seguire un ragionamento rigoroso, sulla scorta dei soli significati dei termini e delle loro definizioni. Riteniamo quindi che la capacità formativa della geometria consista anche in questo poter usare di simboli in certa misura intuitivi senza dover dipendere interamente da questi, ma fidando soltanto sui legami logico-deduttivi. Con ciò si evita il pericolo di certe allergie verso i simboli convenzionali che a volte si riscontrano presso certe intelligenze, peraltro anche di alto livello; tali allergie sono forse più frequenti di quanto non si pensi, e conducono spesso da una parte all'antipatia per la matematica in certi allievi, e dall'altra a giudizi non sempre corretti da parte di insegnanti, che badano soltanto alle capacità di manovra del simbolismo algebrico e non alla formazione mentale. Pertanto, in questo modo, l'allenamento alla formazione logica viene separato dall'addestramento all'impiego di simboli convenzionali e codificati. Osserviamo inoltre che con l'esercizio della geometria appare facile far vedere in opera le procedure logiche di analisi e di sintesi (che già Euclide aveva codificato) per la dimostrazione dei teoremi e per la soluzione dei problemi; procedure che ancora oggi sono valide, anche se qualche ingenuo crede che siano state scoperte recentemente (ovviamente in America), e come recenti scoperte le presentano (ovviamente con parole di pseudo-inglese) e le insegnano. Infine non è da trascurare il fatto che, nella soluzione di problemi geometrici, l'immaginazione può spesso essere utilizzata in modo efficace; si ottiene così spesso di poter stimolare quella creatività dei discenti di cui abbiamo parlato nel Cap. precedente.

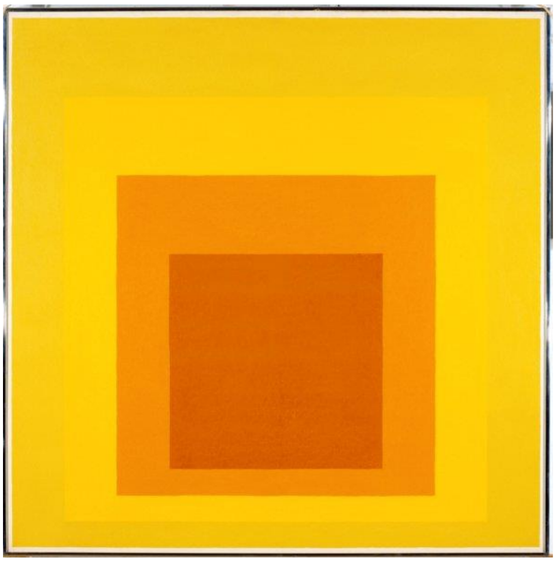
4 - Le circostanze osservate hanno particolare rilievo nel caso della geometria applicata a contenuti spaziali, ovvero ad oggetti tridimensionali. A questo proposito i programmi parlano di "intuizione spaziale", con una espressione che non appare completamente univoca, e ciò soprattutto in relazione al significato del termine "intuizione". Infatti ci pare di poter dire che questo termine può avere vari significati, e che la scelta di uno tra essi può avere notevoli influenze sulla interpretazione delle frasi in cui si esprime il programma. Pensiamo infatti che si possa chiamare "intuizione" l'accettazione immediata della verità di certi enunciati, o del sussistere di legami logici necessari tra enunciati. In questo senso qualche autorevole Autore [AGAZZI] dichiara per esempio che le quattro forme perfette di sillogismi della prima figura della logica classica si possono considerare come gli assiomi di una teoria: cioè, diciamo noi, come dei legami necessari, senza i quali non si può costruire alcun discorso coerente, e che non possono essere giustificati nell'interno della teoria, ma anzi la sostengono come delle colonne portanti. In altro senso, meno rigoroso, il termine "intuizione" viene spesso adottato per indicare la possibilità o la capacità di giungere alle conclusioni di un ragionamento, o di trarre le conseguenze da certe premesse, senza eseguire singolarmente tutti i passaggi logici che sono abitualmente necessari. In questo senso si suol dire che i grandi scienziati hanno la dote dell'intuizione, perché prevedono che da certe premesse si possono trarre certe conseguenze prima di eseguire i passaggi logici o in particolare prima di eseguire tutti i calcoli. In un altro senso ancora, si suol parlare di intuizione in geometria per indicare la capacità di immaginare certi rapporti spaziali e certe particolarità di determinate figure, senza che sia necessario tracciarle materialmente. È forse questo il senso in cui il termine è utilizzato negli enunciati dei programmi; ed a favore di questa interpretazione sta la circostanza che il termine stesso è utilizzato in relazione a figure dello spazio tridimensionale, per le quali il tracciamento di figure che ne diano una rappresentazione esauriente ed utile per le deduzioni appare

particolarmente difficile. In questo ordine di idee pensiamo ancora una volta che l'insegnamento della geometria sia molto utile, perché, in queste circostanze, il ragionamento deduttivo deve appoggiarsi soltanto sulla definizione degli enti in esame e sulla deduzione rigorosa. Ed a questo proposito non possiamo tacere di deplorare che la geometria descrittiva non sia più insegnata nei corsi universitari di matematica (corsi nei quali manca sempre più frequentemente anche la geometria proiettiva, sostituita dall'algebra lineare). Invero la geometria descrittiva fornisce un insieme di simbolismi convenzionali per rappresentare in due dimensioni gli enti dello spazio tridimensionale; di conseguenza il suo insegnamento ha un notevole aspetto formativo, perché allena alla "lettura" di simboli diversi da quelli abituali dell'algebra, ma altrettanto rigorosi. Per non ricordare che la conoscenza della geometria descrittiva diminuirebbe il numero delle figure clamorosamente errate che si incontrano anche troppo frequentemente nella manualistica di ogni grado di scuola.

5 - Per quanto riguarda la geometria i programmi presentano una articolazione di contenuti che viene presentata come segue:
Tema 1. Geometria del piano e dello spazio.
1a - Piano euclideo e sue trasformazioni isometriche. Figure e loro proprietà. Poligoni equiscomponibili: teorema di Pitagora.
2a - Piano cartesiano: retta.
3a - Esempi significativi di trasformazioni geometriche nello spazio. Individuazione di simmetrie in particolare in solidi geometrici.
L'interpretazione pratica di questi enunciati viene iniziata nel documento ufficiale con alcune righe di commento. Vogliamo per il momento fermare la nostra attenzione sulle parole che riguardano il punto 2a; si legge infatti: "Un traguardo importante dello studio della geometria sarà il piano cartesiano, come modello del piano euclideo. Con la sua introduzione saranno disponibili, per la risoluzione dei problemi geometrici, sia il metodo della geometria classica che quello della geometria analitica, e lo studente sarà stimolato ad usare l'uno o l'altro in relazione alla naturalezza, alla espressività ed alla semplicità che l'uno o l'altro offre nel caso particolare in esame." Crediamo che per poter interpretare in modo sufficiente queste righe sia opportuno cercare di comprendere ciò che gli estensori hanno voluto intendere con l'espressione: "piano cartesiano" e con il termine "modello". Anzitutto l'espressione "piano cartesiano" può essere intesa in vari modi; una prima interpretazione, per esempio, potrebbe essere data chiamando "piano" l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) di numeri reali, sul quale viene fissata una metrica, che definisce per esempio la distanza $d\ (P_1, P_2)$ di due punti con la solita formula pitagorica: $d\ (P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)}$; a questa metrica può poi essere associato un gruppo di trasformazioni, che genera la "geometria". Una seconda interpretazione potrebbe esser data chiamando "piano" l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali, come sopra, definendo un gruppo di trasformazioni (per esempio il gruppo ortogonale), e quindi cercando gli invarianti rispetto a quel gruppo: formula che dà la distanza di due punti, il grado dell'equazione che rappresenta un luogo ecc.
Infine si potrebbe interpretare l'espressione convenendo che essa indichi l'insieme delle abituali convenzioni che conducono ad introdurre le coordinate cartesiane (in particolare un sistema ortogonale monometrico di coordinate cosiffatte). In questa interpretazione ovviamente si presuppone nota la geometria euclidea del piano, cioè l'insieme delle proprietà delle figure piane che sono invarianti rispetto al gruppo dei movimenti rigidi e delle similitudini, e si costruisce una rappresentazione degli enti della geometria con gli strumenti dell'algebra. Ritorneremo presto su questa interpretazione, e vogliamo intanto soffermarci sulle possibili interpretazioni del termine "modello". Anche questo termine può assumere vari significati; per esempio, nel senso della logica e delle ricerche sui fondamenti della matematica, si può chiamare "modello" di una teoria (o di una parte di essa) un insieme di concetti che soddisfano agli assiomi della teoria (o di quella sua parte che si considera) e ne garantiscono così la compatibilità. Così fa per esempio David Hilbert, il quale prende il campo complesso come modello degli assiomi del I gruppo dei suoi "Grundlagen der Geometrie" (Verknpfungsaxiomen). Una seconda interpretazione del termine potrebbe essere quella adottata dalla Fisica; secondo questa interpretazione si immagina una certa costituzione di un oggetto di studio, e partendo da questa immagine si deducono logicamente delle conseguenze, che vengono poi controllate con il comportamento della realtà: così per esempio, nella teoria cinetica dei gas, si incomincia immaginando un modello del gas, secondo il quale questo è costituito da sferette tutte uguali e perfettamente elastiche, che simbolizzano le molecole. Forse quest'ultima interpretazione è quella più vicina alle intenzioni degli estensori dei programmi, come si può arguire dai commenti che abbiamo riportato. A questo proposito allora avremmo preferito che si parlasse direttamente di metodo delle coordinate, accettando esplicitamente che sia

stata in qualche modo fondata la geometria del piano, ed aprendo la strada anche alla possibile menzione di coordinate fondate su altre convenzioni, diverse da quelle cartesiane. Si aprirebbe così la strada al concetto di discussione, che realizza in questo caso quel momento di "sintesi" di cui abbiamo detto, e che si trova già in Euclide; pertanto si aprirebbe anche la strada per ribadire l'analisi della adeguatezza della rappresentazione matematica di una realtà supposta già nota, e per la ricerca delle proprietà invarianti rispetto alle varie convenzioni di rappresentazione. Il che riproporrebbe, sotto altra luce, la problematica della geometria delle trasformazioni.

6 - Pensiamo che l'introduzione della geometria analitica con questa impostazione potrebbe servire anche per esemplificare la validità di quanto abbiamo detto nel Cap. I, parlando della matematica come chiave di lettura della realtà; in questo caso infatti la realtà sarebbe data dal contenuto geometrico, supposto noto almeno in parte sotto altra forma, e le convenzioni della geometria analitica permettono di rappresentarla con altri strumenti, diversi dalle figure simboliche tradizionali. In modo analogo, con questi mezzi, la deduzione classica, fatta secondo le regole della logica, si trasforma in calcolo, cioè in deduzione che si ottiene mediante l'applicazione delle regole sintattiche del simbolismo che si adotta, e rispettando le convenzioni scelte. Questa interpretazione della geometria analitica permetterebbe anche di dare esempi concreti di quel metodo di analisi e di sintesi di cui abbiamo detto nel Cap. I, che è stato codificato da Euclide e che ancora oggi deve essere applicato, se si vuole svolgere un lavoro rigoroso. Infatti la deduzione mediante l'algebra, che realizza il momento dell'analisi, cioè della determinazione delle condizioni necessarie, deve sempre essere accompagnato dalla discussione, che realizza il momento della sintesi. Con questa si debbono cercare quali degli enti ottenuti mediante la deduzione soddisfano anche alle condizioni sufficienti. Queste operazioni sembrano a noi di grandissimo valore didattico, perché il discente è avviato ad un lavoro di "cifrazione" e di "decifrazione", o, se vogliamo, di "scrittura" e di "lettura", dovendo rappresentare certi enti, supposti noti, con un linguaggio diverso dal linguaggio comune e dovendo poi interpretare i risultati ottenuti col linguaggio simbolico e con le sue regole. Si tratta di operazioni che vengono necessariamente compiute ogni volta che si utilizza il linguaggio matematico per rappresentare una realtà data. Quindi queste operazioni debbono essere fatte in fisica, in meccanica ed in ogni conoscenza matematizzata della realtà. Nel caso della geometria, la realtà di cui ci si occupa è per così dire trasparente ed elementare. Pertanto questa dottrina fornisce una palestra insuperabile per formare le menti al pensiero scientifico modernamente inteso. Abbiamo detto ripetutamente che, con questa impostazione della geometria analitica, la realtà geometrica è supposta nota. Le modalità con cui questa conoscenza avviene conducono necessariamente a parlare di assiomatica, argomento al quale dedicheremo il prossimo Capitolo.



Josef Albers (1963). Homage to the Square

Cap. 4/1 - L'ASSIOMATICA GEOMETRICA CLASSICA.

1 - Si può dire che l'assiomatica sia nata con la geometria razionale, e precisamente con il primo trattato di questa scienza che la Storia ricordi: gli "Elementi" di Euclide; infatti in quest'opera mirabile il grande geometra greco imposta per primo il metodo che sarà adottato da tutta la matematica successiva; tale metodo consiste nell'enunciare esplicitamente, all'inizio dell'opera, le proposizioni che non vengono dimostrate, e nel dimostrare poi ogni altra proposizione che viene enunciata. È noto che negli "Elementi" le proposizioni enunciate senza dimostrazione sono di due tipi: alcune vengono chiamate "Nozioni comuni", e hanno carattere di grande generalità. Ricordiamo qui, a titolo di esempio, le seguenti:
I - " Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche tra loro", e più sotto:
VIII - "Ed il tutto è maggiore della parte".
[Cfr. Gli elementi di Euclide - A cura di A. Frajese e L. Maccioni. Torino, 1970].
Prima di queste proposizioni Euclide ne enuncia cinque, le quali riguardano delle nozioni di carattere più specificamente geometrico, o delle costruzioni o delle operazioni da eseguirsi sugli oggetti della geometria. È noto che queste proposizioni, enunciate - come si è detto - senza dimostrazione, vengono da Euclide chiamate "Postulati"; è anche noto che alcuni storici hanno interpretato questo nome come il sintomo di una volontà dell'autore di conferire alle frasi un carattere diverso dalle precedenti; come se l'autore fosse conscio del fatto che queste proposizioni hanno degli oggetti meno generali di quelle enunciate in precedenza; e come se questo carattere di minore generalità limitasse in qualche modo la certezza che le proposizioni stesse portano con sé. Ricordiamo che una tra queste riguarda il parallelismo tra rette, e viene chiamata abitualmente *Postulato della parallela*, o anche *Postulato di Euclide*, quasi per antonomasia; esso infatti ha dato luogo ad una secolare catena di tentativi di dimostrazione, e pertanto è stato in qualche modo assunto a caratterizzare tutta l'opera del grade geometra greco; alcuni autori poi parlano semplicemente del *Quinto postulato*, limitandosi ad indicare l'ordine nel quale tale proposizione è enunciata nel trattato euclideo tra i postulati.

2 - Abbiamo detto che l'impostazione data da Euclide alla sua esposizione della geometria è rimasta nei secoli come un modello di tutta la trattatistica successiva, quando abbia raggiunto un soddisfacente grado di rigore. In questo ordine di idee infatti noi crediamo che questo stile di esposizione sia testimonianza di una ricerca di chiarezza e di certezza che è tipica non soltanto della geometria, ma di tutto il pensiero matematico.
Nel caso in esame questa chiarezza e questa certezza vengono cercate mettendo in evidenza i principi sui quali si basa la teoria che viene in seguito esposta e sviluppata. La mentalità tipica, che ha ispirato la matematica greca, e che ispirerà la scienza successiva fino al secolo XIX, è la ricerca di proposizioni iniziali che potessero essere accettate da tutti in forza della loro evidenza, cioè a causa del fatto che tali proposizioni enunciavano delle proprietà vere di enti esistenti: gli oggetti appunto della geometria. Soltanto la crisi del secolo XIX costrinse gli studiosi a considerare i postulati da un altro punto di vista. Tale crisi è stata maturata da secoli di tentativi per giungere a dimostrare il postulato della parallela, ed è stata scatenata dalla creazione delle geometrie non-euclidee, e dalla constatazione del fatto che queste geometrie sono coerenti, e prive di contraddizioni interne. Questa constatazione ha condotto i geometri a considerare i postulati non come fondati sulla evidenza dei contenuti, cioè sulla aderenza degli enunciati ad una realtà materiale idealizzata in qualche modo, ma tenendo presenti soltanto le necessità della fondazione rigorosa della dottrina che si sta costruendo. La dimostrazione della compatibilità logica, della coerenza dei sistemi di geometria che negavano il postulato euclideo della parallela, costrinse i matematici a ripensare un concetto che era stato ritenuto chiaro fino a quell'epoca. Si tratta del concetto che viene abitualmente indicato con la espressione "spazio geometrico", o con altre equivalenti: infatti si potrebbe pensare che, nella mentalità classica, i postulati fossero destinati ad esprimere delle proprietà di questo ente, proprietà ritenute talmente evidenti da poter essere accettate senza dimostrazione alcuna, per il solo controllo della osservazione sperimentale. Questo modo di vedere le cose era stato in qualche modo messo in dubbio dai tentativi secolari (dei quali si è detto) di dimostrare il quinto postulato; ma sussistevano pochi dubbi sulla esistenza dello spazio (beninteso considerato come oggetto della geometria).
La dimostrazione della coerenza delle geometrie non-euclidee suscitò delle gravi difficoltà a queste concezioni: infatti se esistesse un ente, immaginato come dotato di certe determinate proprietà, sarebbe impossibile che esso fosse descritto e conosciuto da teorie contradditorie, come sono la geometria classica euclidea e le geometrie non-euclidee; infatti nella concezione abituale siamo portati ad escludere che un ente

abbia proprietà contradditorie, perché ciò implicherebbe la impossibilità di costruire una qualunque teoria coerente su di esso. Si dovette quindi abbandonare la concezione classica della geometria, considerata come una scienza qualificata e definita dai suoi oggetti e dai suoi contenuti, per adottare una concezione che permettesse di superare le difficoltà logiche generate dalle dimostrazioni acquisite. Questo abbandono portò come conseguenza anche la necessità di guardare in altro modo ai postulati. Questi non poterono più essere considerati come delle proposizioni la cui validità è fondata sulla evidenza, e sulla aderenza ad una realtà esteriore a noi, che viene descritta in base all'osservazione elementare, ma furono considerati come delle proposizioni scelte con una certa libertà, che forniscono la definizione implicita (o definizione d'uso) dei concetti della geometria.
Per avere un'idea del cambiamento di prospettive che così veniva instaurato basta confrontare, per esempio, le frasi con le quali iniziano due trattati ormai classici: gli "Elementi" di Euclide ed i "Grundlagen der Geometrie" (Fondamenti di geometria) di David Hilbert. La prima frase degli "Elementi" è ben nota, e recita: "Il punto è ciò che non ha parte". Essa ha fatto scorrere fiumi d'inchiostro, come suol dirsi; molti commentatori hanno voluto vedere in questa frase la definizione del punto, inteso come elemento fondamentale e primario della geometria; ed ancora oggi qualcuno adotta questa interpretazione della frase, ignorando evidentemente le difficoltà che ne conseguono. La prima frase dell'opera di Hilbert suona invece: "Pensiamo a tre insiemi di oggetti: gli oggetti del primo insieme saranno chiamati "punti", quelli del secondo insieme saranno chiamati "rette", quelli del terzo insieme saranno chiamati "piani" ". Non vi è quindi più la velleità di definire, o almeno di descrivere ciò di cui si parla: infatti la definizione rigorosa degli oggetti sarà data implicitamente dal sistema di assiomi che verranno formulati subito dopo. Pertanto è stata qui adottata in modo esplicito e metodico la tecnica della definizione implicita (o definizione per postulati, o anche definizione d'uso, secondo alcuni Autori) degli enti di cui si parla. Come è noto, quando si adotti questo atteggiamento si debbono di conseguenza risolvere vari problemi, di fondamentale importanza logica ed epistemologica. Se infatti si abbandona la pretesa che i postulati enuncino delle proprietà di certi enti la cui esistenza è accettata o accertata in qualche modo, si presenta il problema fondamentale di garantire che il sistema delle proposizioni enunciate non contenga alcuna contraddizione che è attualmente nascosta, ma che potrebbe diventare palese a seguito delle conseguenze che si traggono dalle proposizioni enunciate; occorre quindi garantire che tale sistema sia, come suol dirsi, compatibile o coerente. Invero se sussistesse il riferimento ad una realtà esteriore questa potrebbe essere assunta come garante della coerenza del sistema di proposizioni che la descrivono; ma la mancanza di questo riferimento costringe il ricercatore a colmare in altro modo la lacuna, ed a garantire la compatibilità del sistema di proposizioni iniziali che si enunciano.

3 - La costruzione di un sistema di postulati presenta anche un secondo problema logico fondamentale, oltre a quello della compatibilità del sistema di proposizioni enunciate; si suole enunciare tale problema dicendo che occorre assicurare la indipendenza del sistema di proposizioni. In altre parole, occorre garantire che nessuna delle proposizioni che si enunciano possa essere dimostrata sulla base delle altre. In particolare si può cercare di garantire che nessuna delle proposizioni possa essere dimostrata sulla base di quelle che sono enunciate prima di lei, oppure si può cercare di garantire che nessuna proposizione possa essere dimostrata sulla base di tutte le altre (cioè di quelle che la precedono e di quelle che la seguono). Nel primo caso si suol dire che le proposizioni del sistema sono "ordinatamente indipendenti"; nel secondo caso si dice che le proposizioni del sistema sono "assolutamente indipendenti".

4 - I due problemi logici che abbiamo presentato poco sopra non hanno la medesima importanza: invero si potrebbe dire che il primo, cioè quello della coerenza, è il più importante; infatti se il sistema di postulati che si enuncia contenesse una contraddizione nascosta, tutta la teoria che si costruisce sarebbe priva di consistenza. Nel secondo caso, cioè in relazione al problema della indipendenza dei postulati, l'accertamento di questa qualità del sistema di proposizioni enunciate è meno importante, perché la sua mancanza non inficia la validità complessiva della teoria che si vuole costruire; e d'altronde la soluzione di questo problema si può ricondurre a quella del primo: infatti per dimostrare che un dato postulato è indipendente dagli altri del sistema che si presenta è sufficiente dimostrare che è compatibile il sistema costituito dalla negazione del postulato considerato e dalla affermazione di tutti gli altri. La procedura che viene abitualmente seguita per accertare la coerenza di un sistema di postulati è quella che porta ad esibire un insieme di enti, scelti fuori dalla teoria che si vuole costruire, che verifichino i postulati enunciati; più precisamente, agli enti considerati vengono attribuiti come nomi i termini che entrano nelle proposizioni, ed in questo caso i postulati traducono le relazioni, che si suppongono note, tra gli enti considerati. Si tratta quindi del ricorso ad una

realtà esteriore, ricorso che, almeno in questo ordine di idee, appare inevitabile. Così, nel caso dell'opera di Hilbert che abbiamo citato, i termini che entrano nelle proposizioni (punto, retta, piano ecc.) vengono interpretati come nomi di certi enti tratti dall'algebra, o dall'analisi matematica; di conseguenza i postulati riproducono delle proprietà di questi enti. Così per esempio il termine "punto" viene interpretato come nome di una terna ordinata di numeri, il termine "piano" viene interpretato come nome di una equazione lineare in tre incognite, e così via. I postulati che vengono enunciati traducono, in questo caso, delle proprietà fondate sull'algebra lineare in un campo numerico. Ovviamente la validità di questa procedura presuppone che sia già stata accertata la coerenza dell'algebra e dell'analisi matematica. Tuttavia questa procedura non instaura un circolo vizioso, perché la coerenza di queste due dottrine può essere garantita senza ricorrere a delle nozioni di geometria; e comunque è lecito pensare che, nel peggiore dei casi, la geometria reggerà logicamente almeno fino a quando reggeranno l'algebra e l'analisi matematica.

Cap. 4/2 - LA RELAZIONE DI UGUAGLIANZA TRA FIGURE.

1 - La relazione di uguaglianza tra figure geometriche può essere analizzata con gli strumenti della logica ed inquadrata nella mentalità e nella metodologia della impostazione assiomatica, della quale abbiamo trattato nel cap. I. Si può osservare che la relazione di uguaglianza ha una importanza fondamentale nella geometria classica: basti ricordare che essa viene introdotta da Euclide con la proposizione 4 [Facciamo riferimento al volume: Gli Elementi di Euclide (a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni). Torino,1970] del primo libro degli "Elementi". Nella manualistica abituale il contenuto delle proposizioni ricordate viene presentato parlando di "criteri di uguaglianza dei triangoli". In particolare quello che viene indicato di solito come il "primo criterio di uguaglianza dei triangoli" afferma che due triangoli, i cui vertici sono indicati con i simboli: *A*, *B*, *C* ed *A'*, *B'*, *C'* sono uguali se sono valide le relazioni seguenti: lato *A B* = lato *A' B'*, lato *A C* = lato *A' C'*, ed infine se l'angolo avente vertice in *A* è uguale a quello che ha vertice in *A'*. È noto che nel trattato euclideo questo criterio di uguaglianza di due triangoli viene presentato con riferimento al trasporto rigido di uno dei triangoli fino a farlo sovrapporre all'altro. Questa impostazione è stata abitualmente accettata sulla base delle nostre esperienze che riguardano le manipolazioni quotidiane sui corpi rigidi; ed anche il concetto di "corpo rigido" viene da noi costruito partendo dalle esperienze di manipolazione di oggetti materiali che non cambiano visibilmente di forma per opera degli sforzi che noi possiamo produrre con le nostre forze muscolari. Tuttavia la critica dei secoli più vicini a noi non si è potuta accontentare dell'appello alla esperienza o ad una pretesa intuizione geometrica che su di essa si fonda; in particolare è stato avvertito il pericolo di circolo vizioso che si instaurerebbe se si facesse ricorso al concetto di uguaglianza tra figure per la definizione di trasporto rigido, e al concetto di trasporto rigido per la definizione dell'uguaglianza tra figure. Tale pericolo era già stato segnalato da Arthur Schopenauer [Die Welt als Wille und Vorstellung - Il mondo come volontà e rappresentazione], il quale aveva criticato il ricorso che Euclide fa al trasporto rigido, proprio in uno dei punti fondamentali della sua costruzione teorica [La questione è discussa estesamente nel volume citato di Frajese e Maccioni, ed anche nella classica opera di Thomas L. HEATH: The thirteen books of Euclid's Elements. New York, 1956].

2 - La situazione che abbiamo descritto poco sopra potrebbe essere descritta parlando di "crisi della nozione di uguaglianza"; e vorremmo osservare che in questo contesto il termine "crisi" non vuole avere il significato abituale, che fa riferimento anche a situazioni di fine, caduta, fallimento; ma invece vuole avere il significato (suggerito anche dalla etimologia greca) di analisi, giudizio, ricerca di fondamento. Questa analisi è stata favorita e quasi urgentemente richiesta dalla invenzione (avvenuta nel secolo scorso) di nuovi rami della geometria, in particolare dalla nascita della geometria proiettiva; nascita che si deve al lavoro di due geniali matematici, che hanno lavorato con mentalità profondamente diverse, raggiungendo tuttavia il risultato storico di dotare la geometria di un nuovo fondamentale capitolo: intendiamo alludere a K. K. von Staudt ed a V. Poncelet. L'importanza della nascita della geometria proiettiva non risiede soltanto nel fatto che essa ha dotato, come abbiamo detto, la matematica di un nuovo ed importante ed imponente capitolo; a nostro parere infatti l'importanza risiede anche nel fatto che essa ha dato occasione ed ha fornito lo stimolo per un lavoro di sintesi dei contenuti delle ricerche geometriche; tale lavoro di sintesi ha trovato la sua espressione nella celebre dissertazione inaugurale di F. Klein, che oggi viene abitualmente ricordata con la espressione "Programma di Erlangen". In quest'opera Felix Klein risolve il problema della classificazione delle varie geometrie esistenti al suo tempo utilizzando il concetto di gruppo di trasformazioni. L'osservazione

fondamentale da cui si può partire per comprendere le idee di Klein potrebbe essere esposta dicendo che già nella geometria classica lo spostamento di una figura con un movimento rigido era considerato non influente rispetto alle proprietà delle quali si interessava il matematico; con altro linguaggio si potrebbe dire che la geometria classica studiava le proprietà delle figure che non variavano con movimenti rigidi. Ora si osserva che si possono comporre questi movimenti in modo naturale, e che l'insieme dei movimenti così composti, e con le proprietà che ne derivano, costituisce un gruppo. Pertanto si giunge ad osservare che l'oggetto di studio della geometria classica è l'insieme delle proprietà delle figure geometriche che rimangono invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni costituito dai movimenti rigidi dello spazio. La nascita della geometria proiettiva portò l'attenzione dei geometri sulle trasformazioni proiettive delle figure; queste costituiscono un gruppo più esteso del gruppo di trasformazioni, ammesso dalla geometria elementare; infatti quest'ultimo può essere visto come un sottogruppo del gruppo proiettivo, ed è caratterizzato dal fatto di lasciare invariata una certa figura che viene anche definita l'*"assoluto"* dello spazio. Pertanto, sotto lo stimolo della problematica generata dalla geometria proiettiva, iniziava la revisione critica del concetto di uguaglianza tra figura geometriche. In forma rudimentale e sommaria si potrebbe dire che nella concezione classica l'uguaglianza di due figure era considerata come una relazione nota, ed il trasporto rigido era visto come un mezzo per verificare il sussistere della relazione stessa. Ma l'invenzione della geometria proiettiva indusse a considerare come uguali tra loro due figure che fossero trasportabili l'una sull'altra con una trasformazione proiettiva, e non soltanto con un movimento rigido o, al massimo, con una similitudine. Si potrebbe esporre l'insieme di questi concetti in forma poco precisa, ma suggestiva, dicendo che occorre scegliere tra due modi di vedere le cose: o due figure si sovrappongono con una trasformazione di un determinato gruppo perché sono uguali; oppure esse sono uguali perché sono sovrapponibili l'una sull'altra con una trasformazione. Nel primo caso la relazione di uguaglianza è considerata nota prima della trasformazione; nel secondo caso il gruppo di trasformazioni è costitutivo della relazione di uguaglianza tra figure. Come abbiamo già detto, la prima posizione è quella classica; pertanto l'evoluzione critica di cui abbiamo detto ne costituisce, per così dire, un ribaltamento radicale. In ogni caso le esigenze della critica odierna richiedono che anzitutto venga esplicitamente detto quale sia la strada che viene scelta, ed in secondo luogo richiedono che non venga lasciato nulla ad una pretesa intuizione geometrica, ma che l'insieme dei concetti scelti come primitivi venga precisato attraverso un insieme di postulati (o assiomi che dir si voglia) esplicitamente presentati come tali; queste proposizioni sono naturalmente enunciate senza dimostrazione, ma occorre ovviamente che sia accertata la loro compatibilità ed anche la loro indipendenza.

3 - Una fra le trattazioni moderne che imposta rigorosamente il problema dei fondamenti della geometria, rimanendo tuttavia nella mentalità classica, è quella data da David Hilbert, nella sua opera intitolata "Fondamenti di geometria", che abbiamo già citato sopra; in essa il grande matematico tedesco sceglie il concetto di uguaglianza come concetto primitivo, ed enuncia un insieme di proposizioni (assiomi) che ne danno la definizione implicita. In tal modo egli giunge a superare le critiche (che abbiamo ricordato) avanzate contro la posizione euclidea, sulla base della osservazione che una nozione così importante, ed anzi addirittura fondamentale come quella di uguaglianza, fosse stata introdotta con il riferimento ad una operazione fisica concreta, come il trasporto rigido. Tuttavia, già nel secolo XIX Hermann Helmholtz preconizzò la strutturazione di un insieme di proposizioni fondamentali della geometria che facesse esplicito riferimento ai gruppi di trasformazioni. Pensiamo che non sia senza significato il fatto che questa idea sia stata lanciata da un cultore di fisica, divenuto famoso per le sue opere in questa branca della scienza. Crediamo infatti che le idee del fisico tedesco siano state il germe per una visione abbastanza nuova ed originale della geometria: precisamente crediamo che questa impostazione (originata, come abbiamo detto, dalle idee di Helmholtz) abbia attirato l'attenzione dei cultori di geometria dagli oggetti ai nostri comportamenti nei riguardi di essi. Invero nella visione classica la geometria era considerata (come si è detto) come determinata dai suoi contenuti, dai suoi oggetti; questi venivano identificati nelle figure, le quali, a loro volta, possono essere guardate come originate dalle nostre esperienze sul mondo materiale, elaborate dalla fantasia. Anche la trattazione di Hilbert, come abbiamo detto, non si scosta da questa concezione, pur introducendo in essa il rigore del metodo assiomatico. Invece la concezione originata dalle idee di Helmholtz sposta l'attenzione dagli oggetti alle trasformazioni di questi; pensiamo che a questo punto sia facile il passo che porta dagli oggetti ai nostri comportamenti nei loro riguardi; cioè conduce dalla geometria, intesa in senso classico come studio di oggetti immutabili ed ideali, alla geometria intesa come primo capitolo della fisica, cioè come dottrina che razionalizza le nostre esperienze nei riguardi dei primi e fondamentali aspetti del mondo reale. Di conseguenza alcune figure geometriche, che erano considerate

come luoghi geometrici, cioè come insiemi di oggetti elementari (punti) caratterizzati da certe proprietà vengono invece presentate in modo, per così dire, dinamico, come traiettorie (oppure orbite che dir si voglia) descritte da un punto o da certi punti, trasformati dalle operazioni di un gruppo. Così per esempio la retta, che nella visione classica è vista come un insieme privilegiato di punti dello spazio, in questa impostazione viene vista come la traiettoria di un punto al quale sono state applicate tutte le traslazioni generate dalle potenze (ad esponente reale qualunque) di una traslazione data. Questo aspetto, relativamente nuovo, secondo il quale si può oggi presentare la geometria, sarà più diffusamente preso in considerazione nel seguito. Ci limitiamo qui a ricordare che i matematici della scuola di G. Peano, ed in particolare Mario Pieri, dedicarono vari e fondamentali lavori ai fondamenti della geometria. Tra gli altri il Pieri trattò diffusamente della fondazione della geometria su questi criteri, nel suo lavoro sulla geometria elementare fondata sul concetto di punto e movimento. Questo modo di vedere la geometria ha visto un recente importante fioritura per opera del Bachmann [Friedrich BACHMANN. Aufbau der Geometrie aus Spiegelungsbegriff. Berlin,1973] e di altri geometri che si dedicano a ricerche ispirate a queste idee. Pare a noi di poter dire che in queste impostazioni i concetti della geometria vengono strettamente collegati con certe strutture algebriche di grande importanza, ampliando così le visioni di F. Klein e di Helmholtz; e queste strutture forniscono gli strumenti per la descrizione degli oggetti geometrici e per la deduzione delle loro proprietà.

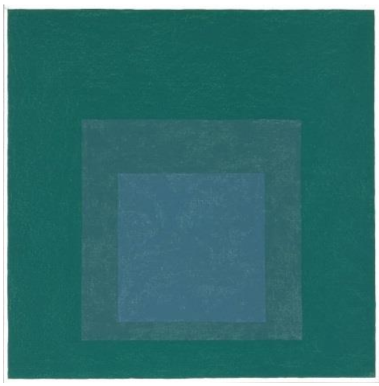
Cap. 4/3 - L'ASSIOMATICA DELLE TRASFORMAZIONI

1 - Ciò che abbiamo scritto poco sopra, a proposito della impostazione dei fondamenti della geometria nello spirito di Helmholtz, ci pare consono all'evoluzione dello spirito e dei metodi anche di altre branche della matematica. A titolo di semplice esempio ci pare che si possa citare l'evoluzione storica recente del concetto di algebra: infatti nel momento della creazione di questa scienza essa appariva come un insieme di nuovi metodi per conoscere e trattare i vecchi contenuti; in certo senso le regole dell'algebra erano dettate dalle proprietà, supposte note, dei numeri che si conoscevano all'epoca. L'adozione metodica di operazioni prima non impiegate costrinse via via i matematici ad ampliare i campi di applicazione, costruendo nuovi insiemi numerici; nacquero così i numeri relativi, e poi il campo complesso; ma si potrebbe dire che in ogni caso le proprietà dei contenuti ispiravano e in certo modo giustificavano l'introduzione di nuovi metodi e di nuove operazioni. Si deve a L. Euler l'analisi della composizione dei movimenti polari (cioè dei movimenti rigidi che lasciano fisso un punto dello spazio), e l'osservazione che la composizione di due operazioni cosiffatte non è commutativa. La costruzione e lo studio metodico di strutture non commutative, come quella di gruppo, e la loro applicazione a problemi geometrici (soprattutto per opera di Klein) fu il germe della evoluzione che spostò gradualmente l'attenzione dei matematici sulla struttura delle operazioni piuttosto che sugli oggetti che si studiano. Di modo che l'attenzione dei ricercatori è oggi prevalentemente concentrata in primo luogo sulle operazioni e sulle strutture algebriche astratte. I numeri ed i campi numerici vengono visti piuttosto come alcuni contenuti che possono, per così dire, dar corpo alle strutture astratte.

2 - L'evoluzione cui abbiamo accennato è avvenuta anche nel campo della geometria, come abbia già detto, e come cercheremo di spiegare ulteriormente. Osserviamo tuttavia che anche nella impostazione classica della geometria si possono trovare delle tracce di un modo di pensare che pare diverso da quello della considerazione abituale. Per esempio si può osservare che nella trattatistica abituale, quando si vuole indurre il lettore a formarsi un'immagine del punto geometrico (nel senso abituale e tradizionale del termine), si suole invitare il lettore ad immaginare dei corpicciolì sempre più piccoli, come macchioline d'inchiostro o granelli di sabbia, e si suole invitare poi a spingere al limite l'immaginazione della piccolezza. Tuttavia vale la pena di ricordare che Euclide usa il termine greco "*semeion*" (cioè segno) per indicare il punto; questo termine potrebbe essere interpretato come un invito al lettore ad eseguire una operazione che consiste nel segnare un posto; e questo posto è ovviamente determinato in modo univoco, in modo che non abbia senso parlare di "parti" del posto indivisibile segnato. Pertanto in questo modo di vedere le cose riuscirebbe inutile l'operazione della immaginazione, la quale deve respingere la possibilità di distinguere delle parti, sempre esistenti in un corpicciolo materiale, per quanto piccolo esso sia. Un atteggiamento aderente a questo spirito è stato assunto da G. Peano, il quale, in uno dei suoi lavori dedicati all'assiomatica della geometria elementare, enuncia il seguente postulato: "Si può segnare un punto". Pare quindi che si possa dire che in questo modo il matematico piemontese abbia inteso riferirsi ad una operazione che l'osservatore può eseguire sul mondo circostante, e quindi abbia, almeno in questo, adottato il punto di vista che stiamo per

esporre, cioè l'atteggiamento che sposta l'accento dalle cose e dai contenuti che si studiano sulle azioni e sui comportamenti del soggetto che costruisce una teoria per organizzare e razionalizzare le proprie esperienze sull'ambiente in cui vive ed opera. Occorre tuttavia osservare anche che questo atteggiamento non è stato adottato da coloro i quali hanno proseguito sulla strada da lui imboccata: infatti Ugo Cassina e Mario Pieri enunciano dei postulati del tipo: "Esistono dei punti", il che vorrebbe significare, come spiega per esempio U. Cassina, che " La classe punto non è vuota". Non è nelle nostre intenzioni il criticare in questa sede le opere di questi matematici; dei quali intendiamo invece apprezzare lo spirito per così dire pionieristico, con il quale hanno affrontato il problema dei fondamenti della geometria, in un'epoca nella quale questo problema, almeno negli ambienti scientifici italiani, non era considerato interessante. Tuttavia vorremmo osservare che, nello spirito rigoroso della impostazione assiomatica, la definizione degli oggetti di cui si parla è fornita implicitamente dall'insieme dei postulati: se questi non sono compatibili, nel loro insieme, gli oggetti di cui si parla non possono esistere, e pertanto l'affermazione della loro esistenza viene ad avere poco senso. Tuttavia si potrebbe anche pensare che l'enunciato di Peano, che afferma che si può "segnare" un punto, possa essere interpretato come un avvio alla procedura per accertare la compatibilità del sistema di postulati che si enunciano. Procedura che, in qualche misura, può anche fare appello alle esperienze concrete, dalle quali, in ultima analisi, prende la sua origine la geometria; questa scienza infatti si distingue da un puro gioco, o da una esercitazione intellettuale puramente astratta per il suo riferimento (più o meno immediato) alla realtà fisica. Non ci pare che sia questo il luogo per proseguire ulteriormente in questa direzione; ci limitiamo ad osservare che le questioni qui affrontate superano ed estendono la problematica relativa all'uguaglianza tra figure, dalla quale queste nostre considerazioni hanno preso l'avvio.

3 - A conclusione dei brevi cenni sulla evoluzione del concetto di scienza geometrica e dell'assiomatica relativa si potrebbe osservare che lo spostamento dell'attenzione dei matematici dagli enti alle operazioni, e quindi dalle proprietà delle "cose" alle leggi che reggono i nostri comportamenti nei riguardi delle cose stesse, non significa per nulla che la matematica possa essere considerata come il campo dei comportamenti arbitrari o delle invenzioni di pura fantasia, senza legami con la realtà. Invero in questa nuova luce l'assiomatica non cessa di essere legata dalla necessità fondamentale di garantire la propria coerenza, ovvero l'assenza di contraddizioni, palesi o nascoste. Perché la presenza di contraddizione nell'insieme di proposizioni iniziali porterebbe come conseguenza alla inconsistenza di tutta la costruzione teorica che si cerca di impostare. La differenza tra questa concezione relativamente nuova e quella classica potrebbe dunque consistere nel fatto che la richiesta di coerenza nella concezione classica era diretta verso le proposizioni che enunciavano certe proprietà degli oggetti che si studiano; nella concezione più moderna la richiesta di coerenza è invece prevalentemente diretta verso l'insieme dei nostri comportamenti nei riguardi di eventuali oggetti. E d'altra parte la garanzia della coerenza interna di un sistema di postulati può essere data con riferimento ad una realtà esterna al sistema stesso, realtà la cui coerenza è stata accertata. Quindi la geometria, per quanto astratte e generali siano le sue teorie, non potrà mai essere considerata come il regno della pura fantasia scatenata, e potenzialmente anche incoerente; la geometria rimane quel dominio della coerenza e della chiarezza che l'hanno sempre caratterizzata durante i secoli.



Josef Albers (1964). Study for homage to the Square

Cap. V - INSIEMI NUMERICI ED ALGEBRA.

1 - Nei Capitoli precedenti abbiamo cercato di mostrare che la matematica, insieme con le sue strutture concettuali, offre anche dei mezzi per esprimere i concetti; e questi mezzi, quando siano bene scelti e bene applicati, presentano delle leggi sintattiche che permettono la deduzione rigorosa, la quale si riduce così ad un'operazione di trasformazioni di formule, con osservanza delle leggi sintattiche. Così abbiamo detto che il sistema di convenzioni della geometria analitica permette di risolvere i problemi di geometria e di dimostrare le sue proposizioni utilizzando le leggi del linguaggio e delle convenzioni adottati per rappresentare gli enti della geometria. È utile quindi qualche riflessione sul linguaggio convenzionale della matematica, per rendersi conto della sua genesi e della sua portata, e quindi poterlo usare con consapevolezza, come si legge sub 3 nell'elenco degli obiettivi, di cui abbiamo già detto. Gli argomenti di cui stiamo parlando sono nominati nel Tema 3 dei programmi, intitolato: Insiemi numerici e calcolo. Tale Tema viene esplicitato in vari capitoli (che commenteremo) come segue:
3a - Operazioni, ordinamento e loro proprietà negli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali.
3b - Valori approssimati e loro uso nei calcoli elementari. Introduzione intuitiva dei numeri reali.
3c - Il linguaggio dell'algebra e il calcolo letterale: monomi, polinomi, frazioni algebriche.
3d - Equazioni, disequazioni e sistemi di primo grado. [CHE COSA SIGNIFICA RISOLVERE UN PROBLEMA? SIGNIFICA ESPLICITARE RAZIONALMENTE LE INFORMAZIONI DATE IMPLICITAMENTE NELL'ENUNCIATO. L'ALGEBRA COME DOTTRINA DELLE PROPRIETÀ FORMALI DELLE OPERAZIONI. PASSAGGIO DAL CONCRETO DELL'ALGEBRA ANTICA, IN CUI LE PROPRIETÀ ERANO DETTATE DAI CONTENUTI, ALLA CONCEZIONE MODERNA, NELLA QUALE LE STRUTTURE SONO STUDIATE IN SÉ, ED I CONTENUTI VENGONO DOPO. LA SOLUZIONE ALGEBRICA DI UN PROBLEMA NON È ALTRO CHE LA CODIFICA DELL'OPERAZIONE DI ANALISI DI CUI ABBIAMO GIÀ DETTO. GLI "ARTIFIZI"] [SE I NUMERI POSSONO ESSERE CONSIDERATI IN CERTO MODO COME LE PAROLE DI UN LINGUAGGIO, L'ALGEBRA PUÒ ESSERE VISTA COME LA GRAMMATICA E LA SINTASSI DI QUESTO LINGUAGGIO. INFATTI ESSA DETTA LE REGOLE PERCHÉ LE PAROLE SIANO SCRITTE GIUSTAMENTE E PERCHÉ LE FRASI ABBIANO UN SENSO.]

2 - Nell'ordine di idee che abbiamo cercato di seguire fin qui, si potrebbe vedere l'estensione dei vari insiemi numerici nominati come il risultato di una evoluzione storica che porta la matematica a dominare dei campi sempre più estesi: dal campo degli insiemi finiti, che viene dominato dall'aritmetica elementare, a quello delle grandezze continue, che viene dominato con i numeri razionali. Notiamo che l'enumerazione degli argomenti fatta nei programmi porterebbe in modo quasi necessario a presentare gli interi prima dei razionali; cioè ad attribuire un segno alle grandezze considerate prima di attribuire loro la divisibilità e poi la continuità. Notiamo di passaggio che questa strada non è l'unica che si può percorrere in modo rigoroso; noi pensiamo che il fatto che essa sia divenuta ormai tradizionale e quindi sia considerata (ingiustamente a nostro parere), come l'unica possibile, si deve forse al desiderio di attribuire alle operazioni sugli enti che si considerano una struttura di gruppo, e quindi di poter utilizzare le proprietà note di questa struttura. A nostro parere si potrebbe percorrere anche la strada che porta dai naturali ai razionali assoluti e quindi al campo razionale, senza difficoltà concettuali; anzi ci pare di poter dire che i razionali assoluti hanno un modello intuitivo nelle grandezze assolute e continue. Ma non ci interessa qui proseguire una discussione di questo tipo, e ci basta aver ricordato che certe impostazioni tradizionali non hanno un significato assoluto, ma sono forse dovute alle mode didattiche del momento.

3 - Il titolo 3a nomina esplicitamente due argomenti che forse vale la pena di distinguere un poco, anche se probabilmente non è opportuno separarli nella didattica: esso parla infatti di operazioni e di ordinamento negli insiemi di numeri che si considerano. Infatti con l'ordinamento si viene a considerare una certa relazione che ha certe proprietà formali, e che non porta a certe manipolazioni concettuali ed a certi risultati. Tuttavia a questo livello di astrazione è forse utile non insistere troppo sulle distinzioni, a meno che il trascurarle non porti a confusioni o a convinzioni fuorvianti nei discenti. Lasciando per il momento da parte il confronto tra i livelli logici degli argomenti proposti, notiamo che l'argomento dell'ordinamento può dar luogo a molti spunti didattici, che l'insegnante accorto e colto far bene a non lasciar cadere. Infatti il concetto

di ordinamento in un insieme numerico può offrire il destro per un insieme di collegamenti, da una parte con il capitolo che parla di relazioni e funzioni, e dall'altra con il capitolo riguardante la logica. Per esempio si può osservare che la relazione che viene espressa mediante il simbolo "<", o mediante il simbolo ">", ha delle proprietà immediate, che si traducono in proprietà formali del simbolo adottato: per esempio la proprietà transitiva, che traduce con una regola formale la proprietà corrispondente, riguardante l'insieme numerico che si considera. Si può osservare inoltre che una analoga proprietà sussiste anche per la relazione di inclusione tra insiemi; e che questa proprietà traduce, per esempio, lo schema logico di collegamento tra proposizioni che la logica classica rappresentava con la parola convenzionale BARBARA. Tutto ciò fa parte della evoluzione della matematica, la quale tende ad estendere il dominio degli enti studiati, con la generalizzazione delle sue strutture e con l'ampliamento dello studio delle proprietà formali delle proprie operazioni.

4 - Il titolo 3c parla del "linguaggio dell'algebra", ricordando i termini utilizzati più abitualmente nella manualistica: monomi, polinomi, frazioni algebriche. Pensiamo che tutto questo vocabolario trovi anche troppo posto nei libri e nei manuali elementari; e ciò fino ad un punto tale che a volte si genera nella mente dei lettori e dei discenti che l'algebra si riduca a queste manovre di carattere simbolico ed al dominio di questo vocabolario tecnico; spesso anche qualche insegnante spesso giudica la resa dei discenti in matematica e addirittura le disposizioni mentali di qualche soggetto con il criterio della capacità di impiego delle regole dell'algebra; e questa mentalità spesso conduce alla insistenza su esercizi complicati, che ben poco hanno a che vedere con la formazione mentale dei discenti. Crediamo quindi più opportuno soffermarci qui sul significato dell'algebra e sul collegamento di questa dottrina con la struttura portante fondamentale del pensiero matematico. A tal fine crediamo utile una breve considerazione sull'evoluzione storica dell'algebra, perché pensiamo che proprio questa evoluzione aiuti a comprendere il significato di questa dottrina. Nelle note storiche che spesso accompagnano nei manuali la presentazione di alcuni capitoli si suole leggere che il nome "algebra" ha origine nella lingua araba. Il significato del termine viene così associato a quello di "regola" che conduce alla determinazione di certi valori che risolvono un determinato problema. In particolare, nel secolo XVI, periodo in cui si suole situare l'inizio dell'algebra nel senso moderno del termine, le soluzioni del problemi erano presentate in forma verbale, appunto nella forma di esposizione di procedure che conducono alla determinazione di certi valori cercati. Si tratta quindi di quella che viene chiamata da alcuni Autori *algebra retorica*. Abbiamo detto che il secolo XVI viene considerato come l'epoca di origine dell'algebra modernamente intesa: infatti in tale epoca gli algebristi italiani giunsero alla soluzione dell'equazione algebrica di terzo e di quarto grado; tuttavia, ripetiamo, la soluzione viene da loro data in parole, esponendo una procedura che conduce al calcolo del valore cercato. Per esempio Niccolò Tartaglia espone la procedura di soluzione nel caso del "Capitolo di cubo e cose uguale a numero", cioè nel caso dell'equazione che si ottiene uguagliando il cubo dell'incognita x, sommato al prodotto dell'incognita per un coefficiente, $p\,x$,(termine che l'autore chiama "cose") ad una costante data (termine noto, che l'autore chiama "numero"): "*Quando che il cubo con le cose appresso se agguaglia a qualche numero discreto trovandui altri differenti in esso...*", ecc.
Non riportiamo qui tutti i versi coi quali l'autore espone completamente la procedura, limitandoci a qualche osservazione: anzitutto, come si è detto, si nota l'assenza di ogni simbolo convenzionale per indicare i numeri e le operazioni su di essi. In secondo luogo si hanno molte regole diverse tra loro, in relazione a vari casi che noi raccogliamo sotto un'unica formula, ammettendo che i numeri reali che entrano nella formula possano avere segni positivi e negativi; invece nella impostazione classica si prendevano in considerazione soltanto dei numeri positivi, e quindi necessariamente si dovevano enunciare varie "regole", distinguendo tutti i vari casi che si potevano presentare. Si comprende quindi quale sia l'importanza che la considerazione dei numeri negativi, e poi la estensione dei campi numerici, ha avuto per il progresso della ricerca matematica. Osserviamo infine che, in mancanza di convenzioni efficaci e sicure per la rappresentazione dei numeri e delle operazioni su di essi, la dimostrazione della validità delle procedure esposte veniva ottenuta in ogni caso con riferimento alla rappresentazione geometrica delle operazioni, interpretando ovviamente ogni numero come misura della lunghezza di un segmento rettilineo, ed interpretando i monomi come espressione di aree e di volumi. In questa rappresentazione ovviamente le operazioni di somma venivano interpretate nel senso abituale di somma geometrica e di differenza di segmenti.

5 - È noto che l'algebra ha vissuto un momento di progresso fondamentale con l'invenzione delle notazioni convenzionali, per indicare le varie operazioni; il merito maggiore di questa invenzione viene attribuito al

francese François de Viète [1540-1603], al quale vengono fatte risalire le origini delle notazioni algebriche che noi ancora oggi utilizziamo. Vorremmo quindi distinguere in questa sede il significato e l'importanza di due circostanze fondamentali per la matematica: la realizzazione della procedura logica di analisi (nota e codificata fin dall'epoca di Aristotele) e la utilizzazione di un certo simbolismo, avente determinate regole sintattiche. Per quanto riguarda il primo punto, ci pare chiaro che anche nella procedura abituale, che fa riferimento alla immagine geometrica, la procedura logica fondamentale non cambia: per sostenere questa nostra affermazione, soffermiamoci a considerare un problema elementare, che può essere risolto con metodi geometrici o con gli strumenti dell'algebra, modernamente intesa. Sia per esempio il problema seguente: trovare un segmento tale che la somma dell'area del quadrato costruito su di esso e dell'area del rettangolo avente per lati il segmento cercato ed il doppio di un segmento dato *b*, sia equivalente al quadrato costruito su un segmento dato a. La nostra abitudine a rappresentare i segmenti con numeri reali ci porta a scrivere la seguente equazione algebrica di secondo grado, la quale "traduce", (secondo il linguaggio abituale), algebricamente il problema geometrico enunciato:

$$(1)\ x^2 + 2\,b\,x = a^2.$$

Il momento più importante, dal punto di vista della procedura logica, è quello in cui si ragiona dicendo: Supponendo che esista il segmento cercato, ed indicata con *x* la sua misura, deve sussistere la relazione (1). Si riconosce quindi che si adotta la procedura di analisi, mediante la quale, supponendo che il problema sia risolto, si traggono le conseguenze necessarie (ciò è espresso dalla parola "deve") da questa esistenza. A questo punto le procedure per determinare il segmento cercato possono essere diverse. Una potrebbe essere dettata dalla geometria, e conduce a sviluppare le considerazioni seguenti: La somma delle aree, espressa dal primo membro della (1), è equivalente all'area del rettangolo che ha come lati il segmento cercato *x* e la somma del segmento stesso e del segmento avente come misura *2b*. Pertanto la (1) stessa può essere scritta nella forma:

$$(2)\ x\,(x + 2b) = a^2.$$

E questa, a sua volta, può essere tradotta nella proporzione:

$$(3)\ x : a = a : (x + 2b).$$

A questo punto la costruzione del segmento di misura *x* può essere conseguita con una procedura classica, che qui esporremo brevemente, invitando il Lettore a tracciare la facile figura.
Si consideri un triangolo *OAB*, rettangolo in *O*, i cui cateti *OA* ed *OB* rappresentino rispettivamente i segmenti dati a e *b*. Si traccia la circonferenza avente centro in *B* e passante per *O*; si congiunga *B* con *A*; sulla retta congiungente sta l'ipotenusa del triangolo *OAB*, ed il segmento staccato dalla circonferenza su questa retta è appunto il segmento cercato, in forza di noti teoremi sulle secanti una circonferenza. La procedura algebrica per giungere allo stesso risultato potrebbe essere presentata nel modo seguente: quale che sia il valore di *x*, supposto esistente, la validità della relazione (1) porta come conseguenza la validità della:

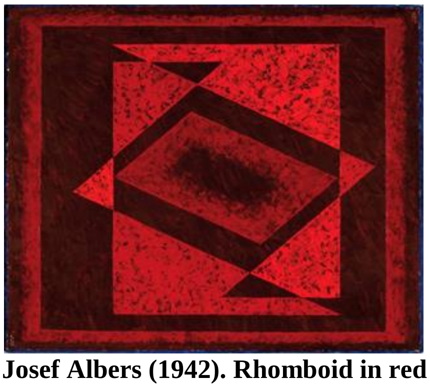
$$(4)\ x^2 + 2b\,x + b^2 = a^2 + b^2.$$

Ancora, quali che siano i numeri *x* e *b*, le leggi formali delle operazioni su di essi autorizzano ad identificare il primo membro della (4) con il quadrato del binomio $x + b$; ed ancora le leggi formali delle operazioni, valide indipendentemente dai valori dei numeri sui quali si opera, conducono ad uguagliare il valore del binomio $x + b$ alla radice quadrata del numero $a^2 + b^2$. E di qui si ricava il valore di *x*. Come si vede, la procedura logica fondamentale è sempre quella classica di analisi: supporre noto il segmento, o supporre noto il numero che ne fornisce la misura, e da questa ipotesi dedurre le conseguenze necessarie. La differenza tra la procedura geometrica e quella algebrica consiste soltanto nella scelta degli strumenti per la deduzione; nel caso della procedura geometrica ci si basa su teoremi noti riguardanti le aree dei rettangoli; nel caso della procedura algebrica ci si fonda sulle proprietà formali delle operazioni eseguite su numeri di cui non si conosce attualmente il valore (si tratta appunto delle incognite da determinare), ma dei quali si sa che ubbidiscono a certe leggi, quali che siano i loro valori.

6 - Le considerazioni che abbiamo svolto a proposito dell'esempio precedente conducono ad approfondire le osservazioni sulle proprietà formali delle operazioni, proprietà che - come abbiamo visto - permettono l'applicazione della procedura logica fondamentale di analisi per la risoluzione dei problemi. Prova di ciò è fornita, a nostro parere, dal cosiddetto "calcolo letterale"; questo infatti potrebbe essere descritto come l'attuazione esplicita delle osservazioni fatte, cioè l'utilizzazione delle proprietà delle operazioni che sono valide quali che siano i numeri sui quali si opera, e per questo fatto appunto sono chiamate "proprietà formali" delle operazioni. Non stiamo a ripetere qui l'elenco delle proprietà in parola, perché esse formano

oggetto di esposizione in tutta la manualistica elementare di algebra; vorremmo piuttosto soffermarci a considerare come la procedura, tipicamente algebrica, di trasformazione delle formule che esprimono dei legami tra quantità note e quantità incognite che si cercano, realizzi una operazione di deduzione che si potrebbe chiamare puramente automatica o meccanica, perché realizzata senza riferimento ai significati dei simboli adottati, ma soltanto in forza delle regole sintattiche dei simboli stessi, cioè in forza delle proprietà formali delle operazioni che si indicano. E qui ricordiamo che chiamiamo regole "sintattiche" di certi simboli le regole che dirigono la formazione di espressioni, in modo che esse abbiano significato, e che dirigono le trasformazioni delle espressioni, in modo che esse conservino ancora significato dopo aver acquisito forme nuove. In questo ordine di idee quindi il termine "sintassi" ha un significato analogo a quello che possiede quando è impiegato in relazione al linguaggio comune, naturale. Anche questo linguaggio infatti deve sottostare a certe regole, perché, come è chiaro, non ogni successione di parole comunica un messaggio che sia intellettualmente valido. Osserviamo tuttavia che, nel caso del linguaggio comune, le parole possono essere impiegate, oltre che per comunicare delle idee, anche per dare comandi, per suscitare o trasmettere emozioni. E ciò permette a molti di non rispettare la sintassi, con la scusa di impiegare un linguaggio, che è creduto tanto più "efficace" quanto meno rispetta le regole della sintassi e spesso del buon gusto.

7 - L'adozione del punto di vista algebrico ha condotto la matematica ad ampliare il campo degli oggetti dei quali essa si occupa e sui quali essa opera. Da un certo punto di vista, si potrebbe dire che le esigenze del calcolo formale hanno generato, in qualche modo, gli ampliamenti degli insiemi numerici di cui si fa uso. Infatti si potrebbe descrivere il fenomeno storico della evoluzione della matematica dicendo che l'attenzione dei ricercatori si è progressivamente spostata dalla considerazione degli enti dei quali la matematica si occupa alla considerazione delle operazioni e delle leggi e regole alle quali esse ubbidiscono. Quindi, per esempio, il passaggio dall'insieme dei numeri naturali all'anello degli interi può essere visto come dettato dalla necessità di adattare all'insieme degli enti su cui si opera la struttura di gruppo in relazione all'operazione di somma; pertanto, in questo ordine di idee, se si vuole che l'operazione di somma abbia sempre una inversa, occorre costruire i numeri negativi. In modo analogo, il passaggio dagli interi ai razionali può essere visto, in questo ordine di idee, come dettato dalla necessità di dare la struttura di gruppo all'operazione di moltiplicazione, eseguita su elementi dell'insieme diversi dallo zero. Ancora, la costruzione del campo dei numeri reali può essere vista, in questo ordine di idee, come dettata dalla necessità di dare senso alle operazioni geometriche, che coinvolgono la proprietà di continuità di quell'ente che si suol chiamare *spazio geometrico*. Infine la costruzione dei numeri immaginari e complessi, sempre in questo ordine di idee, può essere vista come dettata dalla necessità di dare senso alle operazioni che conducono alle soluzione di certe equazioni algebriche. Quelle che qui presentiamo sono quindi delle motivazioni all'ampliamento degli insiemi numerici tradizionali, motivazioni che si fondano sulla tendenza a dare il primato alle operazioni piuttosto che agli enti sui quali operiamo.



Josef Albers (1942). Rhomboid in red

Cap. VII. LOGICA ED INFORMATICA

.

1 - Molte volte, nelle pagine che precedono, abbiamo osservato che uno dei procedimenti fondamentali della matematica è il procedimento logico di deduzione; questa infatti è l'operazione che permette di mettere in opera le procedure di analisi e di sintesi, già codificate da Euclide; le stesse procedure, durante i secoli di evoluzione del pensiero matematico, sono sempre state considerate, senza dubbio alcuno, come quelle che caratterizzano il procedimento di costruzione del pensiero scientifico rigoroso. Pertanto ribadiamo qui la convinzione che l'educazione matematica sia essenzialmente formativa, perché costituisce la palestra insostituibile per educare i giovani alla precisione concettuale ed alla deduzione rigorosa. È anche noto che, fino all'epoca di Leibniz, la deduzione, anche in matematica, era portata a termine con le regole codificate dalla logica che chiameremo "classica", regole codificate da Aristotele, e riprese dalla filosofia scolastica medievale. Tuttavia si può osservare che la logica classica, pur sempre valida anche oggi, utilizza per le sue procedure i linguaggi naturali: il greco, il latino, il francese ecc.. Ed in queste sue procedure può incappare negli svantaggi che l'impiego dei linguaggi naturali provoca quando si voglia fare della scienza: infatti è facile osservare che il termine del linguaggio naturale ha un significato che, nella maggior parte dei casi, è determinato dal contesto, dal periodo, dalla pagina, addirittura dall'opera dell'Autore che lo impiega. Inoltre la deduzione, operazione necessaria per la conoscenza scientifica, è abitualmente eseguita secondo i canoni della logica classica; canoni non errati, ma appesantiti dalle regole grammaticali, e dalle analisi rese necessarie dalle ambiguità di cui si diceva. Possiamo quindi pensare che uno dei momenti essenziali per il progresso della scienza, ed in particolare della fisica, si sia avverato quando la Meccanica prima e poi tutta la fisica, hanno adottato il simbolismo matematico, che permette la designazione precisa degli oggetti, attraverso l'operazione di misura ed i numeri, e permette la deduzione rigorosa, che diventa un calcolo, eseguito secondo regole precise, che fanno parte della sintassi dei simboli adottati. Non soltanto la fisica ha avuto un progresso grandissimo con l'adozione dei simboli; anche le altre scienze della Natura hanno fatto registrare progressi inimmaginabili quando hanno a dottato simbolismi opportuni, abbandonando il linguaggio comune: si confronti per esempio le descrizioni che i vecchi alchimisti fanno dei fenomeni della chimica, e le designazioni precise che la chimica di oggi ottiene mediante formule convenzionali e altri simboli. Non desta quindi meraviglia il fatto che la logica abbia oggi adottato dei simboli per designare i concetti fondamentali del nostro ragionare, ed abbia adottato delle procedure analoghe al calcolo algebrico per sostituire le regole classiche della deduzione verbale.

2 - Ciò che abbiamo scritto poco sopra, trattando del simbolismo, viene spesso presentato da alcuni Autori in modo un poco fuorviante, sotto una luce che potrebbe indure a pensare che la Logica rigorosa sia stata inventata da poco, e che il suo sviluppo dati dalla metà del secolo scorso, epoca nella quale appunto si situa la invenzione del simbolismo convenzionale e del calcolo logico. Occorre invece ricordare che fin dagli inizi del pensiero umano si incominciò a meditare sul significato e sulla portata delle nostre deduzioni, e sulle regole che si possono dettare per ottenere delle conseguenze valide da certe premesse. È noto che già in Aristotele [IV sec. A. C. - *Organon*] si incontra un trattato rigoroso ed astratto su questi problemi, sui quali i pensatori dei secoli successivi continuarono a meditare ed a riflettere. In questo ordine di idee ricordiamo che la Logica è stata sempre tradizionalmente considerata come la dottrina che insegna a ragionare bene, o - se si vuole - a dire con certezza la verità. Nella nomenclatura classica si distingueva tra logica materiale e logica formale: infatti si osserva facilmente che una proposizione può essere considerata vera sostanzialmente in due casi; o perché dice delle cose che di fatto sono vere e constatabili direttamente (per esempio tale è la proposizione: Parigi è la capitale della Francia), oppure perché la sua verità è stata dedotta dalla verità di altre proposizioni, mediante il ragionamento. Per esempio: Tutti i parallelogrammi sono poligoni piani, tutti i quadrati sono parallelogrammi, quindi tutti i quadrati sono poligoni piani. Le singole scienze si incaricano di dettare le regole che conducono ad accertare che certe proposizioni enunciate siano vere di fatto; e la dottrina che detta queste regole in generale veniva classicamente chiamata *logica materiale*; invece quella che si chiamava *logica formale* era la dottrina che garantiva la validità della connessione di una conclusione con certe premesse, e quindi la verità della conclusione nella ipotesi che le premesse fossero accettate oppure accertate come vere. Di questa seconda dottrina sembra che si occupino i programmi di matematica della scuola media superiore, quando nominano la Logica. Cercheremo di giustificare questa nostra opinione nelle pagine seguenti; qui vorremmo ribadire la nostra perplessità sull'accoppiamento di "logica ed informatica" che viene fatto negli enunciati dei programmi. Un

accoppiamento cosiffatto non ci sembra giustificato nella realtà, almeno quando si accetti per il termine "informatica" il significato che l'uso ed il buon senso gli attribuiscono. Abbiamo infatti già detto che l'informatica ci si presenta oggi come una dottrina che insegna a gestire l'informazione ed a comandare gli strumenti materiali ed elettronici che permettono una gestione rapida, efficace ed economica dell'informazione. La Logica invece è una dottrina molto più generale ed astratta, la quale detta le regole che debbono essere rispettate tanto dall'informatica come da ogni altra scienza o tecnologia. Pertanto una intitolazione di programmi di "Logica ed informatica" ha, a nostro parere, validità analoga ad una del tipo "termodinamica e guida dei camion", oppure "fisica ed educazione stradale". Ovviamente non si vuole con queste parole diminuire l'importanza della informatica nella tecnologia e nella scienza di oggi, così come nella vita organizzata ed associata della nostra società; si vuole soltanto ristabilire una gerarchia delle conoscenze che - nostro parere - ha molto significato se l'insegnamento deve avere carattere formativo e non puramente addestrativo: e ci pare che uno dei primi momenti di una formazione intellettuale sia quello che insegna la gerarchia delle conoscenze, che è base e fondamento di ordine mentale.

3 - In ogni tempo ed in ogni circostanza la conoscenza scientifica non ha potuto fare a meno della Logica; il primo esempio molto importante di presenza fondamentale della Logica nella conoscenza scientifica si incontra nel celebre trattato degli "Elementi" di Euclide. Si potrebbe dire che senza la procedura deduttiva questo trattato non potrebbe neppure sussistere; e questo fatto conferma che la Geometria si è sempre presentata come una scienza particolarmente rigorosa: ricordiamo per esempio che B. Spinoza [1632 - 1677] ha intitolato un suo celebre libro "Ethica more geometrico exposita", per esprimere la propria convinzione che i suoi argomenti riguardanti l'etica sono trattati con perfetto rigore, cercando appunto di imitare il rigore con il quale la Geometria giunge alle proprie conclusioni. Possiamo quindi concludere che il ragionamento rigoroso e coerente non necessariamente deve utilizzare dei simboli e delle strutture convenzionali analoghe a quelle dell'algebra: infatti la Geometria greca, pur essendo perfettamente chiara e coerente, utilizza per la deduzione i canoni della Logica classica, che adotta il linguaggio comune. Tuttavia già nel secolo XVII Leibniz adottò delle figure e dei diagrammi per rappresentare i rapporti tra concetti; ed una simile procedura è stata adottata da Leonardo Eulero [Leonhard Euler, (1707 - 1783), il cui nome è stato latinizzato in "Eulerus" nelle opere latine, e viene tradotto in italiano con Eulero]. Questo grande matematico, per esporre le leggi fondamentali della Logica, inventò quelle rappresentazioni convenzionali grafiche che oggi vanno sotto il nome di "diagrammi di Eulero" ed anche di "diagrammi di Eulero-Venn"; quest'ultima denominazione accosta al nome del grande matematico svizzero anche quello di un logico inglese [John Venn, 1834 - 1923] che in certo senso reinventò le rappresentazioni introdotte da Eulero. Occorre anche ricordare che le rappresentazioni introdotte da Leibniz, ed i diagrammi di Eulero-Venn, non sono i soli tentativi che furono fatti per rendere convenzionalmente visibili i rapporti tra insiemi o tra proposizioni; per esempio si conoscono anche i diagrammi di Carrol [Lewis Carrol, pseudonimo di Charles Dodson, (1832 – 1898), matematico e scrittore]. Occorre tuttavia osservare che queste illustrazioni, pur essendo efficaci ed a volte anche utili, non permettono di eseguire facilmente le deduzioni; esse quindi potrebbero essere accostate alle figure della Geometria, che aiutano la intuizione, stimolano la fantasia nella ricerca della soluzione dei problemi, ma non possono essere fondamenti per la deduzione rigorosa; questa è compito della sola Logica, come già Platone osserva ["*.....I geometri si avvalgono di figure visibili, e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui esse sono le immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé, e non su quelle che disegnano. Lo stesso si dica per tutte le figure che disegnano o modellano, di cui si servono come immagini (a guisa si ombre o di immagini riflesse sulle acque) cercando di vedere certe verità che non si possono vedere se non col pensiero...*" Platone. La repubblica. 510, d, e]

4 - Una svolta importante verso la Logica così come è modernamente intesa fu impressa da George Boole [1815 - 1864] con l'invenzione di un sistema di notazioni dei concetti e delle loro relazioni che permette di tradurre la deduzione con una trasformazione di formule, cioè con un calcolo. Abbiamo già accennato alla possibilità che un termine preso dal linguaggio comune possa avere diversi significati, dipendentemente dal contesto o dall'abitudine di un singolo Autore; di conseguenza, abbiamo rilevato la grandissima utilità per la scienza della adozione di simboli, ognuno dei quali con significato univoco. Pertanto la Logica classica, che utilizzava il linguaggio comune per la deduzione, era costretta a minute analisi sui significati dei termini; essa tuttavia aveva sviluppato una minuziosa classificazione delle procedure che conducono in modo immediato o non immediato, da proposizioni vere a proposizioni pure vere. In particolare la Logica classica

aveva codificato il sillogismo, come paradigma del ragionamento che permette di accertare la verità di una proposizione a partire dalla verità, accettata o accertata, di altre due, che vengono chiamate abitualmente "premesse". Il progresso iniziato con l'opera ed il pensiero di Boole consiste nell'adozione di simboli artificiali e convenzionali per indicare i concetti, e soprattutto nella introduzione di certi simboli convenzionali per indicare le operazioni sui concetti. Esporremo il pensiero di Boole ed i suoi sviluppi adottando il vocabolario ordinariamente usato oggi in queste questioni, anche senza addentrarci nei problemi di Logica che questa adozione comporta. In questo ordine di idee, come punto di partenza può essere assunto il concetto di "insieme"; non ci addentriamo qui nella spinosa questione della definizione di tale concetto e nella costruzione di una sua teoria rigorosa; prenderemo tale concetto come primitivo, accontentandoci al massimo della descrizione che ne viene fatta abitualmente con la celebre frase di G. Cantor [1845 - 1918]: "Si dice insieme la collezione di più enti considerati come un tutto unico". Naturalmente questa frase è soltanto una descrizione e non una definizione rigorosa, nonostante il fatto che in molta manualistica elementare essa sia ancora presentata come una definizione. Vale la pena di sottolineare il parallelismo che intercede tra questo concetto intuitivo e l'operazione di astrazione, alla quale la Logica classica demandava la costruzione dei concetti che venivano chiamati *universali,* cioè concetti che potevano essere attribuiti con verità a molti enti diversi. Tale parallelismo non è completo, e pertanto non ci dilungheremo su questo punto.
Nel seguito, secondo una abitudine abbastanza diffusa, per indicare gli insiemi utilizzeremo le lettere maiuscole dell'alfabeto latino, con la eccezione dell'insieme vuoto, che sarà indicato qui col simbolo $\emptyset$.
……………………………..

5 - Ciò che abbiamo esposto finora spiega, almeno in parte, la utilità della Logica simbolica, con la quale si raggiunge la univocità della rappresentazione dei concetti e il rigore formale della deduzione. Queste circostanze vengono abitualmente confermate osservando che, per esempio, nella lingua italiana la congiunzione *e* può avere diversi significati, come si può rilevare dagli esempi seguenti: "L'aria era calda e umida", oppure: "Nell'aula vi erano studenti e studentesse". Invero nel primo caso la congiunzione *e* attribuisce contemporaneamente all'aria (nelle circostanze descritte) le due qualità di alta temperatura e di umidità; quindi, con il linguaggio della teoria degli insiemi, l'aria apparteneva all'intersezione dei due insiemi: quello delle arie umide e quello delle arie calde. Nel secondo caso la congiunzione *e* indica ovviamente la unione tra due insiemi, quello degli studenti e quello delle studentesse. Pertanto una medesima espressione verbale rappresenta due operazioni logiche del tutto diverse. Pertanto la precisazione delle due circostanze e dei due significati dovrebbe essere oggetto di ulteriori riflessioni, mentre con la rappresentazione simbolica convenzionale tale precisazione non ha ragione di essere. Analoghe considerazioni si potrebbero svolgere in relazione alla congiunzione *o*, che in italiano può avere diversi sensi; tra l'altro essa può essere utilizzata per esprimere due casi incompatibili (nel senso dell'*aut aut* latino), oppure una alternativa che non esclude la presenza di entrambi i casi. A queste ragioni di equivoco, che vengono spesso ricordate nella manualistica corrente, si può aggiungere anche la inevitabile scansione temporale (diacronica) con la quale debbono necessariamente essere enunciate o lette le frasi del linguaggio comune. Inconveniente questo che porta a dover distinguere, nella espressione comune verbale, come proposizioni diverse quelle che spesso possono essere rappresentate con una unica formula. Tale per esempio è il caso della frase universale negativa: "Nessun A è un B", la quale, nella lettura abituale, viene distinta da quella che si ottiene per conversione: nessun B è un A"; la validità di entrambe la frasi è oggetto di una determinata e particolare legge di conversione nella Logica classica, mentre nell'algebra di Boole entrambe vengono rappresentate con un'unica formula: $A \cap B = \emptyset$; la quale risulta equivalente all'altra $B \cap A = \emptyset$, in forza della proprietà commutativa della operazione di intersezione. Osserviamo che l'adozione di simboli convenzionali ed artificiali permette di evitare nel linguaggio scientifico quegli inconvenienti del linguaggio comune generati dalla diversità di significati possibili di un medesimo termine e quindi la necessità di ricorrere al contesto per poter precisare (quando sia possibile) il significato di un termine in una data frase. Si può tuttavia osservare che anche l'adozione di un linguaggio completamente artificiale e convenzionale non elimina la necessità di ricorrere ad un contesto: infatti se si adotta un simbolo assolutamente inusitato prima, è necessario spiegare il suo significato e la sua sintassi facendo ricorso al linguaggio comune. Si potrebbe quindi pensare che in questo modo si introduce necessariamente un contesto nella trattazione. Tuttavia questo contesto è precisato e determinato, e circoscritto alle pagine nella quali si spiegano i significati dei simboli adottati e le regole del loro impiego; nel seguito tale significato e tali regole non cambiano più. [PARLARE DELL'USO DELLA LOGICA NELL'INFORMATICA. DIAGRAMMI DI

FLUSSO (FLOW CHARTS) E DIAGRAMMI AD ALBERO. SEMPRE SUSSIDI VISIVI, CHE NON HANNO A CHE FARE CON LA LOGICA, INTESA COME TEORIA DELLE DEDUZIONE CERTA, MA AL MASSIMO CON LA CLASSIFICAZIONE. SI OSSERVI CHE I DIAGRAMMI AD ALBERO DANNO DI MENO DEI DIAGRAMMI DI EULERO-VENN, PERCHÉ DANNO SOLTANTO SI O NO, E QUINDI ESCLUDONO LA PARTECIPAZIONE DI UN ELEMENTO A DUE INSIEMI. TUTTAVIA NON VOGLIAMO DISPREZZARE NIENTE] [LOGICA DELLE PROPOSIZIONI.VALORI MODULO 2 ECC.] [ALCUNI VALORI DIDATTICI DELL'INFORMATICA. ANALISI DELLE DIPENDENZE LOGICHE E DELLA STRUTTURA DI UN PROBLEMA; ANALISI DELLE OPERAZIONI DI CALCOLO; VALUTAZIONE DEL SIGNIFICATO DELLE INFORMAZIONI CHE SI OTTENGONO, ANCHE NUMERICHE].

6 - Abbiamo accennato ripetutamente all'informatica e qui riprendiamo il discorso in relazione all'enunciato dei programmi, che la nominano insieme alla logica. A questo proposito ricordiamo che abbiamo presentato la logica come dottrina che insegna a ben ragionare: il che si può interpretare in relazione a tutti i momenti in cui si realizza il pensiero: in particolare nel momento della astrazione, della concettualizzazione, della deduzione. Ci pare chiaro che ognuna di queste operazioni è importante, e che su ognuna di esse può influire la possibilità di utilizzare degli strumenti completamente affidabili, che sollevino l'operatore dalla fatica fisica e psicologica, e garantiscano il rispetto delle regole formali e sintattiche dei simbolismi eventualmente adottati. In questo ordine di idee, ricordiamo ciò che abbiamo già osservato, quando abbiamo detto che il calcolo eseguito sui numeri è una forma di deduzione. [Ricordo il detto di Peano, (2), secondo il quale "…*la matematica è una logica perfezionata*]. Pertanto già l'impiego intelligente di un apparato di calcolo numerico può aiutare l'insegnante informato ed accorto a dare un'idea esatta e corretta della matematica; in particolare può servire per chiarire che cosa si intende dire parlando di soluzione di un problema matematico. Infatti molto spesso la soluzione di un problema cosiffatto viene vista sotto l'aspetto di applicazione di una formula determinata, spesso addirittura applicata senza che sia compresa nel suo significato. Come conseguenza si ha che presso molti utenti della matematica si presenta, in forma più o meno conscia ed esplicita, una primitiva e rudimentale classificazione dei problemi, che mette da una parte quelli considerati risolubili e separa da questi quelli considerati non risolubili; ed il criterio per questa classificazione è spesso la esistenza o meno di una o più formule risolutive. Pare chiaro che questo modo di pensare limita di molto il significato della matematica; noi pensiamo invece che avviare un problema alla soluzione significhi cercare, con procedimenti razionali, di crescere le informazioni esplicite che riguardano la soluzione, o - meglio - di rendere sempre più esplicite le informazioni che sono contenute implicitamente nell'enunciazione del problema stesso. In particolare l'abitudine di utilizzare le formule in modo automatico ed acritico conduce spesso a considerare dei valori numerici come esatti, senza tener conto del fatto che si è operato su valori approssimati, e quindi inficiati da errori, che si accrescono con i calcoli e le manipolazioni. L'impiego intelligente dei mezzi di calcolo numerico permette invece di eseguire i calcoli numerici in modo da mettere in evidenza gli intervalli di errore, e quindi di trasmettere soltanto le informazioni vere.

7 - Le osservazioni che abbiamo fatto poco sopra si riferiscono alla utilizzazione intelligente dei mezzi di calcolo numerico. Ma è ben noto che il progresso della tecnica mette oggi a nostra disposizione degli strumenti molto più potenti di quelli di puro calcolo numerico. E proprio la presenza di questi mezzi rende assolutamente necessaria la riflessione sul loro impiego, in modo da evitare che l'uso di questi strumenti induca ad una nociva pigrizia mentale, ed ad una negativa dipendenza mentale e soggezione alle procedure stabilite da altri e supinamente seguite in modo acritico. Il punto fondamentale che contraddistingue i nuovi strumenti di elaborazione dell'informazione (in particolare di calcolo) ci pare essere il fatto che le macchine possono cambiare il loro funzionamento in dipendenza dei risultati dei calcoli eseguiti in precedenza. Ovviamente questi cambiamenti non sono eseguiti dalla macchina per sua scelta, ma debbono essere programmati in anticipo ed imposti alla macchina nei modi tipici, particolari di ogni apparato. Questa operazione viene abitualmente chiamata "programmazione"; e si sa che esistono ormai varie procedure, che vengono chiamate "linguaggi di programmazione", mediante i quali si danno alle varie macchine i comandi che realizzano i loro comportamenti logicamente stabiliti, a seconda della gerarchia logica dei vari stadi di ricerca delle risposte che si cercano. In questo stadio di programmazione è necessario che l'operatore analizzi logicamente il problema e stabilisca una gerarchia logica della operazione che conduce a migliorare le informazioni che si posseggono. Ancora una volta, conviene ricordare che questa procedura logica si riduce ad una realizzazione particolare della procedura di analisi di cui abbiamo già detto più volte. Per

queste operazioni possono essere utili i sussidi grafici di cui abbiamo detto: diagrammi di flusso (detti da qualcuno "flow charts") e diagrammi ad albero; infatti le macchine operano generalmente una scelta tra due possibili; quindi tutta la ricchezza espressiva della logica classica, che utilizzava il linguaggio comune e parlava ad esseri umani, deve essere in questi casi costretta, ristretta ed in sostanza impoverita in una successione di scelte esclusive tra due casi. In modo analogo anche la esecuzione dei puri e semplici calcoli numerici deve spesso essere decomposta in molte operazioni elementari delle quali occorre precisare la cadenza e la successione cronologica e logica. È noto che il progresso quotidiano degli apparati riduce di giorno in giorno la fatica e l'attenzione degli operatori, e risparmia loro molte delle operazioni di cui abbiamo detto: tuttavia noi riteniamo che l'esercizio mentale di analisi e di deduzione faccia preferire, in sede didattica di formazione degli allievi, i linguaggi di programmazione meno avanzati; infatti per l'impiego di questi occorre che l'operatore si renda conto esplicitamente della struttura logica di un problema, e del significato delle informazioni che si possono ottenere con l'impiego della deduzione, anche se questa viene aiutata materialmente dai meccanismi.

8 - Non ci sembra questo il luogo per approfondire ulteriormente l'esposizione delle particolarità delle manovre delle macchine; queste infatti ci sembra abbiano un significato ed un valore formativo molto inferiore a quelli che sono posseduti dall'insegnamento della logica e della matematica. Di conseguenza l'impiego del tempo per il loro insegnamento può essere considerato come un periodo di addestramento, forse utile in qualche modo, ma certamente meno formativo della introduzione al pensiero rigoroso. Occorre inoltre ricordare che il progresso rapidissimo di questi strumenti elettronici mette rapidamente fuori causa molti sforzi che tendono ad insegnare la manovra di strumenti che riescono rapidamente ad essere superati e dimenticati.

J. Albers. Homage to the Square (1962). Joy.
Harvard Art Museum.

X - CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE.

[QUESTO CAPITOLO DOVREBBE CONTENERE LE APPLICAZIONI PRATICHE E DIDATTICHE DELLE COSE DETTE PRIMA. LE RIGHE CHE SEGUONO RIPRODUCONO UN MIO INTERVENTO PER DIESSE DEL 9 GENN. 1992. SONO DA UTILIZZARSI LE CONSIDERAZIONI SULLA SCIENZA E SUL SUO SIGNIFICATO E QUELLE SULL'INSEGNAMENTO. INTERESSA FORSE ANCHE IL DISCORSO SUL LINGUAGGIO DELLA SCIENZA; QUI SI POTREBBE INSERIRE L'ACCENNO ALLA MATEMATICA COME LINGUAGGIO DELLA FISICA: VEDI GALILEO E CIÒ CHE È DETTO AL CAP. IX.]

1 - Le domande che mi sono state rivolte coinvolgono - a mio parere - da una parte la concezione stessa di scienza, i suoi metodi, il suo linguaggio; e d'altra parte esse coinvolgono il valore formativo dell'insegnamento della scienza in sé, e della scienza come fatto storico, come un dato della società umana, dato particolarmente importante per la nostra vita e per la società di cui facciamo parte.
Pertanto mi permetterò di organizzare le mie riposte in un modo che non è strettamente aderente alla organizzazione delle domande, ma che mi facilita il compito di mettere in evidenza un certo desiderio di organicità nei pensieri che vorrei esporre.
Per quanto riguarda il concetto stesso di scienza, vorrei mettere in evidenza un carattere che mi sembra importante, anche se non esaurisce tutto il complesso universo che oggi noi consideriamo pensiero scientifico. L'aspetto particolare che qui mi interessa mettere in evidenza è dato dal fatto che la scienza ci si presenta come conoscenza fondata e motivata: non quindi puro e semplice elenco di dati, non un mero coacervo di informazioni. Io penso infatti che la procedura caratteristica della scienza si possa presentare, in forma sommaria e rudimentale, come una successione di certe operazioni, che potrebbero essere identificate nel modo seguente: osservazione, formulazione di ipotesi, deduzione, verifica. È appena necessario ricordare che questi momenti non sono separati di fatto, né hanno, nella realtà della ricerca scientifica, una successione cronologica che rispecchia l'ordine con il quale li ho elencati qui; infatti questa elencazione vuole essere soltanto la presentazione di una gerarchia logica, e non necessariamente intende dare una descrizione della realtà dei fatti, come essi storicamente avvengono. In particolare mi pare di poter dire che, tra i momenti che ho presentato poco fa, quelli della formulazione delle ipotesi e della deduzione sono tipici e caratteristici del pensiero scientifico: vorrei infatti osservare che questo pensiero si caratterizza, a mio parere, come la ricerca del fondamento nascosto, ma necessariamente esistente, delle apparenze esteriori. In forma suggestiva, anche se poco precisa, vorrei dire che il ricercatore procede come se dicesse : "Le cose ci si presentano con queste apparenze perché sono *costituite* in questo ed in quest'altro modo". Per la scienza dunque è la costituzione intima delle cose che spiega le apparenze che noi vediamo, osserviamo, esperimentiamo. Questa costituzione intima non è ovviamente percepita direttamente (altrimenti sarebbe oggetto di osservazione diretta), ma è considerata come il fondamento necessario della conoscenza razionale; conoscenza che vuole essere, ripeto, non una pura elencazione di fatti, non come un semplice accumulo di informazioni, ma come una specie di possesso "dal di dentro", una conoscenza dei principi e delle cause delle cose che percepiamo. Mi rendo ben conto del fatto che questo modo di pensare tradisce una concezione metafisica della realtà, ed accetto anche che questa visione sia considerata e qualificata come ingenuamente, acriticamente metafisica. Ma ritengo che senza questa impostazione, anche rudimentale ed acritica, non si possa comprendere in alcun modo il processo cognoscitivo della scienza.
Il secondo momento della costruzione di una spiegazione scientifica della realtà è quello in cui si deducono le conseguenze dalle ipotesi formulate. Infatti, come abbiamo rilevato, il contenuto delle ipotesi non è oggetto di osservazione diretta. Pertanto la validità delle ipotesi può essere giudicata soltanto dalla validità delle conseguenze che da esse si possono trarre. È appena necessario osservare che noi giungiamo a queste conseguenze adottando le leggi e le procedure della nostra logica; e non è detto che queste procedure rispecchino esattamente la costituzione della realtà che noi osserviamo. Anzi, si potrebbe dire che la nostra mente giunge alle conclusioni percorrendo delle strade del tutto diverse da quelle con cui la realtà collega le cause con gli effetti. Sulla validità della procedura deduttiva, almeno in linea di principio, non pare che vi siano dubbi tra coloro i quali praticano la ricerca scientifica; Federigo Enriques, nelle sue riflessioni sulla logica, trovò necessario rilevare esplicitamente la esistenza e l'importanza di questo momento strettamente logico del procedimento di formazione di una spiegazione scientifica dell'esperienza empirica; precisamente egli enunciò un postulato che chiamò "postulato di coerenza", destinato - a mio parere - ad esprimere

esplicitamente la fiducia di ogni operatore della scienza nella validità della procedura logica di deduzione. Ovviamente la "coerenza" di cui parla Enriques si riferisce al comportamento della realtà sperimentale.

2 - Il concetto di scienza che ho cercato di presentare mi pare che spieghi la presenza del pensiero scientifico come un dato storico costante nella storia dell'uomo. E quando parlo di pensiero scientifico intendo, ripeto, la ricerca della spiegazione razionale della realtà osservata, attraverso la ricerca della cause sufficienti a spiegare, motivare, fondare ciò che vediamo e sentiamo. Vorrei aggiungere che, a mio parere, il tentativo di spiegare l'esistenza della scienza solo col desiderio di operare sulla natura e di asservirla ai nostri fini non è sufficiente per spiegare e giustificare un fatto storico imponente: la ricerca delle cause, l'ansia della chiarezza e delle certezza, in un mondo oscuro e complicato. Quindi io penso che la concezione secondo la quale l'esistenza della scienza si giustifica soltanto come la ricerca di una dottrina che diriga ed illumini teoricamente la tecnica, l'operare dell'uomo pratico, diretto a fini utilitaristici, sia una visione riduttiva della scienza, visione incapace di spiegare a fondo la esistenza di ricerche astratte e di rami della scienza che, al loro nascere, non avevano alcuna applicazione pratica. In altre parole, una visione cosiffatta non riuscirebbe a spiegare le fatiche e le vicende della ricerca scientifica, che la storia ci presenta. E ciò sia detto senza negare un altro fatto importantissimo, che io ritengo caratteristico del nostro tempo: il legame tra scienza e tecnica, legame che oggi va facendosi sempre più stretto, rendendo sempre più labile ed evanescente la linea di confine, che una volta separava le due attività umane, in modo netto e ben visibile. Sarebbe molto interessante dedicare una riflessione approfondita a questo fatto, che io - ripeto - considero molto importante, e caratteristico dell'epoca in cui viviamo; ma ritengo che non sia questo il posto né il momento per svolgere queste considerazioni.

3 - Mi pare abbastanza chiaro che ogni scienza, pur rimanendo nel quadro generale che ho cercato di tracciare, sviluppi per proprio conto un suo linguaggio specifico; questo dipende ovviamente da tutta una quantità di fattori: tra gli altri, ricorderò l'oggetto materiale di ogni scienza, il punto di vista sotto il quale l'oggetto viene studiato, e le circostanze nelle quali la ricerca scientifica viene svolta. Si potrebbe dire che queste circostanze spingono ogni scienza a costruire il proprio linguaggio particolare, pur senza determinarlo in modo definitivo. E ciò perché la formazione del linguaggio di ogni singola scienza viene determinata anche da molti altri fattori, che sarebbe difficile enumerare e soppesare singolarmente. Infatti il linguaggio deve ubbidire a varie necessità; alcune primarie, delle quali diremo brevemente, ed altre forse meno appariscenti ma pure importanti. Tra queste ultime vorrei ricordare il compito di comunicazione delle conoscenze e dei concetti, compito che il linguaggio deve assolvere e che determina spesso delle scelte storiche che non sono tutte spiegabili in termini razionali astratti. È noto per esempio che fin verso il secolo XVII il linguaggio ufficiale delle scienze era il latino, usato come lingua internazionale: in latino è stata scritta l'opera fondamentale di Huygens sulla probabilità, in latino è scritta l'opera di Bonaventura Cavalieri sugli indivisibili, in latino è scritta l'"Etica" di Spinoza, in latino sono scritti i "Principia " di Newton. Tale fatto è forse dovuto al peso della filosofia scolastica, che aveva dominato la cultura scientifica e teologica per secoli; e la dipendenza della scienza dalla filosofia e dalla teologia ispirava forse anche la dipendenza del linguaggio della scienza da quello delle altre due dottrine.
Oggi, come tutti sanno, l'ufficio di lingua internazionale della comunicazione scientifica è stato assunto dalla lingua inglese; anche in questo caso le ragioni sono da ricercarsi forse nella situazione politica e nell'influenza che l'economia e la tecnica hanno sulla ricerca scientifica. Ma il compito di comunicazione che il linguaggio scientifico deve svolgere è soltanto uno di quelli ai quali deve assolvere; a mio parere infatti un compito fondamentale del linguaggio scientifico è quello della rappresentazione precisa ed univoca degli oggetti e dei concetti che vi si ricollegano. Questa esigenza fondamentale della univocità spiega l'abbandono frequente del linguaggio comune e la nascita dei linguaggi particolari, dei gerghi tecnici, dei simbolismi. Da questo punto di vista la matematica ci offre un esempio tipico: infatti il suo linguaggio è quasi totalmente simbolizzato e codificato in maniera convenzionale; in più, i simboli sono dotati di una sintassi, cioè di un insieme di regole che permettono la deduzione rigorosa ed ineccepibile, con l'impiego delle sole regole formali dei simboli adottati. Vorrei osservare che questo stato di cose è frutto di una lunga evoluzione storica; ciò si può constatare per esempio leggendo i testi in cui Niccolò Tartaglia, nel secolo XVI, presentava la procedura di soluzione dell'equazione cubica: infatti le operazioni che noi oggi rappresentiamo con formule sono da lui presentate con parole, che descrivono delle procedure: per esempio ciò che oggi noi rappresentiamo con il simbolo di radice quadrata di un numero dato viene da lui indicato con parole del linguaggio comune, con frasi del tipo: "Prendi quel numero che, moltiplicato per sé stesso,

produce il dato...". Il caso della matematica è soltanto un esempio tipico di questa evoluzione della scienza; ma anche le altre scienze ce ne offrono esempi molto importanti; il primo è dato dalla fisica, che oggi è completamente matematizzata, nel senso che ha preso a prestito dalla matematica simboli e strutture deduttive. Ma anche la chimica si può dire abbia fatto coincidere il proprio progresso verso lo stato di scienza con l'adozione di un simbolismo chiaro ed univoco. Cose analoghe si potrebbero ripetere, anche se in diverse misure, per le altre scienze, e tralasciamo le facili esemplificazioni. Vorrei osservare che questa ricerca di linguaggio tecnico preciso, ricerca che - come abbiamo visto - costituisce una fisionomia tipica della scienza, ha un valore formativo importantissimo per i nostri scolari. Infatti il mondo di oggi ci seppellisce sotto una massa asfissiante di informazioni inutili e fuorvianti, e soprattutto ci affoga con una alluvione di messaggi allusivi, imprecisi, destinati a muovere le emozioni con il pretesto di dare delle informazioni. L'abitudine al linguaggio preciso e univoco è quindi una formazione che può essere data con l'insegnamento della scienza e che risulta utile non soltanto ai fini della costruzione di una cultura seria e autonoma, ma anche (e vorrei dire soprattutto) per il carattere del cittadino. Questi infatti ha tutto da guadagnare accostandosi alla scienza: e noi dobbiamo insegnargli ad apprezzare il carattere di pensiero motivato e fondato, di metodo coerente e rigoroso per guardare alle cose, cercando le ragioni intime delle apparenze, e non arrestandosi alla superficie. Ricordo che il mio maestro, Oscar Chisini, nella prefazione al suo trattato di geometria analitica e proiettiva, osservava che questa educazione intellettuale è utile a chiunque, allo scienziato come all'avvocato, all'ingegnere come al magistrato.

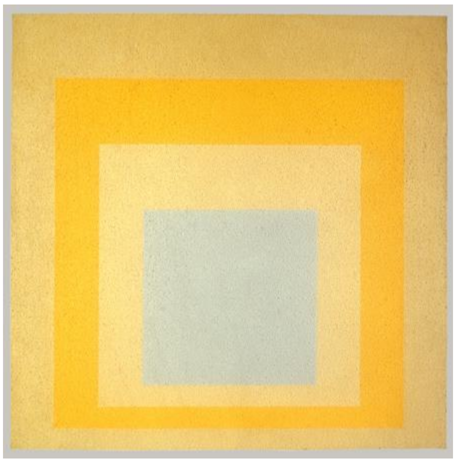
4 - Ho accennato a questioni di carattere didattico; vorrei tornare sopra questo argomento, occupandomi del significato della storia della scienza nella didattica e in generale nella formazione del giovane. Infatti si potrebbe dire che ciò che abbiamo detto finora può riguardare l'educazione con la scienza: cioè l'educazione alla chiarezza concettuale, alla obiettività, alla costanza, al linguaggio chiaro e preciso, alla deduzione rigorosa ed ineccepibile a cui la scienza può condurre; e ciò, beninteso, al di là delle informazioni sulle teorie e sui metodi, informazioni che la scuola deve conferire in modo metodico ed organico. Tuttavia ritengo che occorra anche pensare all'educazione alla scienza: e con queste parole io vorrei esprimere la mia convinzione sul fatto che la scuola deve anche insegnare ai giovani a capire il fatto storico ed umano costituito dalla scienza, fatto imponente quanti altri mai nella nostra società.
Ritengo che questo lavoro sia importante, per non dire addirittura necessario, per evitare che i giovani cedano a visioni fuorvianti, che vanno dalla chiusura e dalla incomprensione delle opere dei nostri padri alla idolatria della scienza, diretta esclusivamente al dominio delle forze della Natura e vista come l'unica e suprema liberatrice dell'umanità dai suoi mali. Il che potrebbe condurre da una parte ad una visione limitata e chiusa dell'attività intellettuale dell'uomo, visione che esclude ogni altra forma di razionalità che non sia quella del metodo scientifico, e dall'altra parte ad una idolatria che potrebbe condurre anche a crisi esistenziali, in caso di fallimenti di teorie o di sistemi scientifici. Ho parlato prima della comprensione del lavoro e dell'impegno dei nostri padri; infatti la mentalità della ricerca scientifica conduce spesso a disprezzare una sistemazione teorica che sia superata, anche da poco tempo: vorrei dire che la scienza è tesa a conquiste sempre nuove e risonanti: quindi una teoria che non soddisfa più viene immediatamente gettata, e capita spesso che i suoi sostenitori siano guardati con sufficienza e con compatimento anche da giovani che hanno una statura umana molto inferiore alla loro, e che hanno il solo vantaggio (non meritato) di vivere dopo di loro e di fruire di informazioni nuove. A questo proposito vorrei ricordare il detto, richiamato anche da Newton, secondo il quale noi siamo come pigmei che vediamo lontano perché sediamo sulle spalle di giganti. E se ci ricordassimo più spesso di questo pensiero forse avremmo minore sicumera e maggiore apprezzamento per chi ha lavorato prima di noi. In questo ordine di idee penso che occorra porsi il problema di presentare la storia della scienza nelle scuole. Ciò permetterebbe anzitutto di coltivare quel senso di comprensione e di solidarietà umana, al disopra dello spazio e del tempo, che dovrebbe essere uno degli scopi della coscienza storica dell'uomo. In secondo luogo io penso che spesso la presentazione storica potrebbe dare il senso della globalità di certi problemi, la cui soluzione ha dato luogo a teorie, che, pur essendo importanti per una gran quantità di ragioni, spesso hanno assunto un aspetto di autonomia, ma anche di complessità e di estensione che fa spesso perdere di vista il significato del problema da cui esse hanno preso origine. Ho in mente, come esempio tra i tanti possibili, il caso del capitolo trigonometria, che ancora oggi tiene un posto eccessivo in certi corsi di matematica delle scuole secondarie ed è presentata in modo tale da far dimenticare i problemi originali da cui è nata. Pertanto la presentazione dell'aspetto storico dell'evoluzione della scienza contribuisce anche a quell'educazione alla scienza della quale ho parlato prima, e che completa il quadro dell'educazione con la scienza. Tuttavia queste idee richiedono una attenta

riflessione in sede didattica, perché non è ovviamente possibile presentare la scienza secondo la sua evoluzione storica: questa infatti avviene con pentimenti, revisioni, corsi e ricorsi; si potrebbe dire che il cammino della scienza fa pensare al cammino di un fiume verso il mare; cammino pieno di anse e curve. Occorre inoltre evitare di dare alla storia della scienza l'aspetto di un'antologia di aneddoti o di curiosità; aspetto che attira spesso l'attenzione dei periodici di volgarizzazione o degli scrittori di libri pseudostorici.

5 - Ciò che ho detto finora mi ha condotto vicino alla questione del rispetto della originalità e della spontaneità degli allievi nell'insegnamento della scienza. In questo ordine di idee penso che la questione sia abbastanza vicina a quella riguardante l'insegnamento per problemi. Le voci a favore di questi atteggiamenti didattici sono spesso numerose e insistenti. Penso di dover ricordare che queste idee non sono nuove: ricordo per esempio l'opera di un grande matematico del secolo XVIII, Clairaut, il quale scrisse un'opera didattica interessante, mirante a presentare l'insegnamento della geometria per problemi, partendo da situazioni concrete. Clairaut si dimostra critico nei riguardi dell'insegnamento tradizionale della geometria; insegnamento che, con atteggiamento tipico dell'epoca, viene giudicato eccessivamente astratto e quindi tale da non creare interessi e motivazioni nei discenti. Vorrei dire, a questo proposito, che il desiderio di creare interesse dei discenti dovrebbe essere uno degli strumenti principali di una didattica ben fatta; ma ho qualche perplessità sull'adozione metodica di queste tecniche didattiche; ho detto adozione metodica, perché penso che spesso anche delle idee didattiche molto valide siano rese meno efficaci, e addirittura controproducenti, se si pretende di adottarle in modo scriteriato, e di farne della "trovate" destinate a risolvere ogni problema didattico. Effettivamente il rispetto per la curiosità e l'originalità del discente, lo stimolo alla ricerca alla costruzione autonoma della spiegazione della realtà richiede da parte dell'insegnante una preparazione molto profonda, un sicurissimo possesso della materia ed anche una maggiore attenzione e fatica nel lavoro didattico.
Come si vede, non manca il lavoro per chi lo voglia fare, e soprattutto lo voglia fare bene.

C.F.Manara. Milano, 9 gennaio 1992. [QUESTO INCONTRO CON IL GRUPPO DIESSE DI MILANO PUÒ SERVIRE PER LE CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE DI DIDATTICA. INOLTRE VORREI ESPORRE IN QUESTO CAPITOLO LE IDEE DI MIE FIGLIA RAFFAELLA SULL'ERRORE IN MATEMATICA, ED IL SUO SIGNIFICATO DIDATTICO. NIHILI OBSTAT CHE SI POSSA ANCHE RICORDARE IL DISCORSO DI ENRIQUES: INFATTI QUEST'ULTIMO RIMANE SUL PIANO TEORETICO, MENTRE QUELLO DI RAFFAELLA SI SITUA SUL PIANO DIDATTICO. LE IDEE FINORA ESPOSTE FANNO RIFERIMENTO AL LINGUAGGIO DELLA SCIENZA, AL SUO CARATTERE E QUINDI AL SIGNIFICATO DEL SUO INSEGNAMENTO. TUTTE COSE CHE È NECESSARIO DIRE, ANCHE SE VANNO CONTRO LA VISIONE POPPERIANA DI MODA. OCCORREREBBE INOLTRE TRATTARE QUI LA TRATTAZIONE "IN PARALLELO" DEI VARI CAPITOLI, SUPERANDO LE ENUNCIAZIONI MINISTERIALI. TUTTO QUESTO HA INFLUENZA SUL PROBLEMA DELLA VALUTAZIONE DELLA RESA DEI DISCENTI; PROBLEMA QUESTO CHE MI PARE DI IMPORTANZA FONDAMENTALE, E CHE È LASCIATO AI PEDAGOGISTI, MA SENZA CHE I DOCENTI ABBIANO UN SOSTEGNO TEORETICO E PRATICO.] [MI PARE CHE LA STRUTTURA DI QUESTO CAPITOLO POSSA ESSERE PROGETTATA NEI SEGUENTI TEMPI: 1) CARATTERI DELLA SCIENZA E DEL SUO LINGUAGGIO (RELAZIONE DIESSE). 2) DIDATTICA "GLOBALE" DELLA MATEMATICA: I CONTENUTI DEBBONO SERVIRE COME PRETESTI ED APPOGGI PER LA COSTRUZIONE DELLA TEORIA E PER LA COMUNICAZIONE DI STRUTTURE CONCETTUALI E SIMBOLICHE. PER ESEMPIO LA GEOMETRICA ANALITICA PRESENTATA COME TIPICO MOMENTO DI REALIZZAZIONE DELLA MATEMATICA COME CHIAVE DI LETTURA DELLA REALTÀ. 3) PROBLEMA DELL'ERRORE E DELLA VALUTAZIONE DEI DISCENTI: L'ERRORE DOVREBBE ESSERE TRATTATO IN DUE MOMENTI: TEORETICO (ENRIQUES) E PRATICO (RAFFAELLA). LA VALUTAZIONE DOVREBBE TENER CONTO DELLA FORMAZIONE E DELL'AUTONOMIA MENTALE PIUTTOSTO CHE DELLA RIPETIZIONE MNEMONICA DELLE REGOLE E DELLE FORMULE].
Ciò che è stato detto ripetutamente nelle pagine che precedono non dovrebbe richiedere molte precisazioni ulteriori; crediamo tuttavia che si possa aggiungere qualche osservazioni in relazione al particolare carattere dell'impegno didattico nell'età alla quale fanno riferimento i programmi considerati. Noi pensiamo infatti che nella fasi di passaggio dall'età preadolescenziale a quella pienamente adolescenziale il compito didattico

dell'insegnante sia particolarmente delicato; crediamo infatti che in questa età si possa influire sulla formazione razionale della mente dei giovani, senza rinunciare ad utilizzare la capacità creativa dell'immaginazione che ci pare propria dell'età infantile che il giovane ha da poco lasciato. Pertanto la curiosità e l'immaginazione dovrebbero essere imbrigliate e avviate alla costruzione di una visione razionale del mondo; visione che dovrebbe mettere in evidenza i momenti fondamentali della conoscenza razionale e quindi, in particolare, l'importanza del lavoro logico e deduttivo. Infatti l'immaginazione del giovane, in particolare stimolata oggi da una certa stampa che insiste sulla fantascienza, talvolta riduce lo spazio che deve essere dedicato al contatto con la realtà ed al rispetto della leggi della coerenza. In questo ordine di idee pensiamo che sia profondamente educativa la presentazione della Geometria razionale; infatti questa dottrina insegna a rispettare la consequenzialità logica, ed insieme stimola ad immaginare le soluzioni e le varie realizzazioni di un medesimo concetto astratto.



J. Albers. Homage to the Square with rays (1959). MET

APPENDICE. I PROGRAMMI.

I nuovi programmi per la scuola secondaria superiore sono presentati distinti per materia in base ad una giustificazione metodologica, che viene data con la frase seguente: "Fatta salva l'unitarietà d'ispirazione che caratterizza la scuola secondaria superiore, le esigenze orientative e in senso lato professionalizzanti alle quali essa deve soddisfare impongono una differenziazione dei percorsi che, convenzionalmente, si può introdurre mediante la scansione in indirizzi".
Qualche giornale ha rilevato ironicamente la pesantezza del gergo pedagogese che contraddistingue questi enunciati, affermando che, in presenza di questa prosa, è forse ora di riabilitare l'analfabetismo. Senza volere entrare nel merito, crediamo di poter comprendere che gli indirizzi di cui si parla nella frase introduttiva siano richiamati da due notazioni convenzionali, indicate con le lettere A e B, accompagnate dalle seguenti avvertenze, riguardanti i programmi: Il programma A è per gli indirizzi classico, linguistico, socio-psico-pedagogico e per gli indirizzi artistici e professionali; il programma B è per gli indirizzi scientifico, scientifico-tecnologico, tecnologici ed economico. Entrambi i programmi portano l'intestazione "MATEMATICA ED INFORMATICA", con l'avvertenza "Disciplina comune a tutti gli indirizzi". Riporteremo qui di seguito gli enunciati relativi al programma B; quelle parti che sono specifiche di questo programma e che non entrano nel programma A saranno precedute da un asterisco "*". L'elenco dei contenuti dei programmi è preceduto da un discorso che enuncia le "Finalità dell'insegnamento".
Tali finalità sono enunciate nel modo seguente (programma B): La matematica, parte rilevante del pensiero umano ed elemento motore dello stesso pensiero filosofico, ha in ogni tempo operato su due fronti: da una parte si è rivolta a risolvere problemi ed a rispondere ai grandi interrogativi che man mano l'uomo si poneva sul significato della realtà che lo circonda; dall'altra, sviluppandosi autonomamente, ha posto affascinanti interrogativi sulla portata, il significato e la consistenza delle stesse sue costruzioni culturali. Oggi queste due attività si sono ancor più accentuate e caratterizzate, la prima per la maggiore capacità di interpretazione e di previsione che la matematica ha acquistato nei riguardi dei fenomeni non solo naturali, ma anche economici e della vita sociale in genere, e che l'ha portata ad accogliere e a valorizzare, accanto ai tradizionali processi deduttivi, anche i processi induttivi, la seconda per lo sviluppo del processo di formalizzazione che ha trovato nella logica e nell'informatica un riscontro significativo. Sono due spinte divergenti, ma che determinano con il loro mutuo influenzarsi, il progresso del pensiero matematico. Coerentemente con questo processo, l'insegnamento della matematica si è sempre estrinsecato e continua ad esplicitarsi in due distinte direzioni: a "leggere il libro della natura" ed a matematizzare la realtà esterna da una parte, a simboleggiare ed a formalizzare, attraverso la costruzione di modelli interpretativi, i propri strumenti di lettura dall'altra, direzioni che però confluiscono, intrecciandosi ed integrandosi, con reciproco vantaggio, in un unico risultato: la formazione e la crescita dell'intelligenza dei giovani. Infatti lo studio della matematica:
- Promuove le facoltà intuitive e logiche,
- educa ai procedimenti euristici ed anche ai processi di astrazione e di formazione dei concetti,
- esercita a ragionare induttivamente e deduttivamente, sviluppa le attitudini sia analitiche che sintetiche, determinando così nei giovani l'abitudine alla precisione di linguaggio e alla coerenza argomentativa.

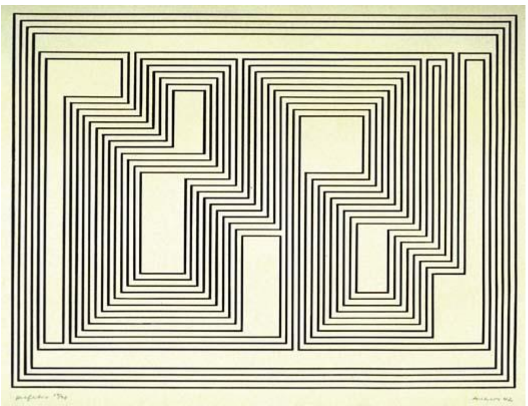
Ed è proprio nella fase adolescenziale, nel biennio della scuola secondaria superiore, che l'insegnamento della matematica enuclea ed affina queste attività, caratterizzandole e, nello stesso tempo, fondendole in un unico processo culturale e formativo. In questa fascia di età l'insegnamento della matematica persegue il fine di portare gradualmente lo studente a:
- sviluppare la propria intuizione geometrica,
- acquisire capacità di deduzione e induzione,
- acquisire rigore espositivo e precisione di linguaggio,
- apprezzare il valore della logica nella formazione del pensiero,
- recepire il contributo culturale e tecnico dei nuovi mezzi informatici,
- cogliere il rilievo storico di alcuni importanti eventi nello sviluppo del pensiero matematico.

Queste finalità sono comuni a tutti gli indirizzi di studio perché concorrono, in armonia con l'insegnamento delle altre discipline, alla promozione culturale ed alla formazione umana dei giovani, sia che intendano proseguire in indirizzi di studio scientifico, sia che intraprendano invece studi non scientifici o che decidano di orientarsi verso il mondo del lavoro. In un corso di studi ad indirizzo tecnico-scientifico l'insegnamento deve inoltre confermare l'orientamento dei giovani per questo tipo di studi, potenziare e sviluppare le loro attitudini, offrire quel bagaglio di nozioni che consentirà loro di seguire proficuamente gli studi scientifici o tecnici a livello superiore.

OBIETTIVI DI APPRENDIMENTO.
Alla fine del biennio lo studente dovrà essere in grado di:
1 individuare proprietà invarianti per trasformazioni elementari;
2 dimostrare proprietà di figure geometriche;
3 utilizzare consapevolmente le tecniche e le procedure di calcolo studiate;
4 riconoscere e costruire relazioni e funzioni;
5 matematizzare semplici situazioni riferite alla comune esperienza e a vari ambiti disciplinari;
6 comprendere ed interpretare le strutture di semplici formalismi matematici;
7 cogliere analogie strutturali e individuare strutture fondamentali;
8 riconoscere concetti e regole della logica in contesti argomentativi e dimostrativi;
9 adoperare i metodi, i linguaggi e gli strumenti informatici introdotti;
10 inquadrare storicamente qualche momento significativo dell'evoluzione del pensiero matematico.

ARTICOLAZIONE DEI CONTENUTI
Tema 1. Geometria del piano e dello spazio.
1a - Piano euclideo e sue trasformazioni isometriche. Figure e loro proprietà. Poligoni equiscomponibili; teorema di Pitagora.
1b - Omotetie e similitudini del piano. Teorema di Talete.
1c - Piano cartesiano: retta, parabola, iperbole equilatera.
1d - Coseno e seno degli angoli convessi. Relazione fra lati ed angoli nei triangoli rettangoli.
1e - Esempi significativi di trasformazioni geometriche nello spazio. Individuazione di simmetrie in particolari solidi geometrici.

Lo studio della geometria nel biennio ha come finalità preminente quella di condurre progressivamente lo studente dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale, e rappresenta come tale una guida privilegiata alla consapevolezza argomentativa. A ciò il docente potrà pervenire adottando n metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive apprese dall'allievo nella scuola media, proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzioni; è tuttavia necessario che ogni ipotesi o ammissione cui si farà ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento. Al docente compete poi l'impegno di avviare la fase euristica su processi di assiomatizzazione partendo da semplici situazioni assunte nei vari campi. Ciò nella prospettiva di familiarizzare gli studenti col metodo ipotetico-deduttivo e pervenire negli eventuali studi successivi alla costruzione di un sistema di assiomi per la geometria elementare. A tal fine verrà programmata, in un quadro di riferimento organico, una scelta delle proprietà (teoremi) delle figure piane da dimostrare, utilizzando la geometria delle trasformazioni oppure seguendo un percorso più tradizionale.


Josef Albers

Note.

(1) La nostra età fruisce del beneficio delle precedenti, e spesso conosce molte cose non per esservi giunta con il proprio ingegno, ma illuminando con forze altrui anche le grandi opere dei padri. Diceva Bernardo di Chartres che noi siamo come nani che siedono sulle braccia di giganti, così che possiamo vedere molte cose anche molto più in là di loro, non come per acutezza della propria vista o perché più alti di corporatura, ma perché siamo sollevati e innalzati da gigantesca grandezza.
Fruitur tamen etas nostra beneficio precedentis, et sepe plura novit non suo quidem precedens ingenio, sed innitens viribus alienis et opulenta patrum. Dicebat Bernardus Carnotensis nos esse quasi nanos gigantium humeris insidentes, ut possim plura eis et remotiora videre, non utique proprii visus acumine aut eminentia corporis, sed quia in altum subvehimur et extollimur magnitudine gigantea.

(2) G. Peano, Rivista di Matematica, 1891, I, pp.66-69, 154-159. (Una polemica fra Peano e Segre).
"…..Il rigore assoluto che si esige in matematica non significa punto che non si possa studiare una scienza finché non siano analizzati tutti i suoi principii. Ogni autore può assumere quelle leggi sperimentali che gli talentano, e può fare quelle ipotesi che più gli piacciono. La buona scelta di queste ipotesi ha importanza grandissima nella teoria che si vuol sviluppare; ma questa. scelta si fa per via d'induzione, e non appartiene alla matematica. Fatta la scelta dei punti di partenza spetta alla. matematica (*che, secondo noi, è una logica perfezionata*) dedurre le conseguenze; e queste debbono essere assolutamente rigorose. (Chi enuncia delle conseguenze che non sono contenute nelle prime, potrà fare della poesia, ma non della matematica)….."

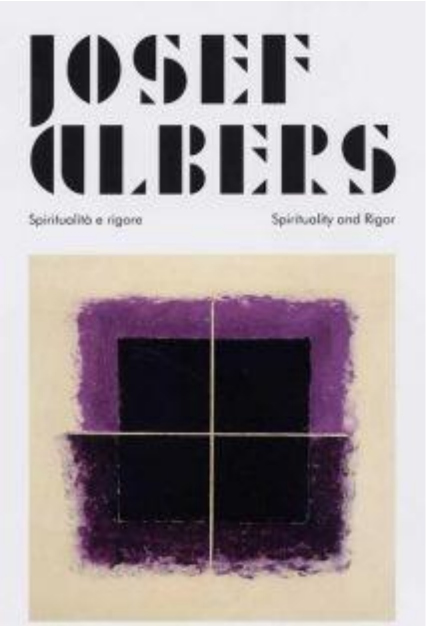
(*N.d.R. Reimpaginazione maggio 2013*).

(N.d.R.) Su Josef Albers. Da www.sapere.it

Pittore, grafico e *designer* tedesco (Bottrop, Vestfalia, 1888-New Haven, Connecticut, 1976). Insegnante e poi direttore dei corsi di vetreria e di mobilio del Bauhaus a Weimar (1923), Dessau e Berlino (1925-33), approfondì e sperimentò ricerche sulle tecniche e sui nuovi impieghi strutturali dei materiali. Quando nel 1933 il Bauhaus fu costretto dal partito nazista a chiudere, emigrò negli Stati Uniti. La sua attività di docente proseguì, presso l'Università di Yale (North Carolina), dove dal 1950 al 1958 diresse la scuola d'arte impegnandosi nello studio delle variazioni del quadrato. Questo fu assunto da Albers come forma simbolica, espressione funzionale di un mito; lo schema di tutti i suoi dipinti è il medesimo: quadrati inscritti l'uno nell'altro tra i quali si stabiliscono relazioni tonali, razionali e percettive fino a rendere la superficie piatta del quadrato un volume (*Omaggio al quadrato*, 1950; *Apparizione, omaggio al quadrato*, 1959; New York, Guggenheim Museum). Anche nell'adozione di altre tecniche quali puntesecche, legni, linoleum e litografie, Albers privilegia la linea retta e il bianco e nero per articolare volumi nello spazio (*Trasformazione sullo schema n. 7*, 1949; *Costellazioni strutturali*, 1953-58, al Brooklyn Museum).

Da Enciclopedia Britannica:
…After moving to the United States, Albers concentrated on several series of works that systematically explored the effects of perception. In his series of engravings on plastic *Transformations of a Scheme* (1948–52) and in the series of drawings *Structural Constellations* (1953–58), he created complex linear designs, each subject to many possible spatial interpretations. His best-known series of paintings, *Homage to the Square* (begun in 1950 and continued until his death), restricts its repertory of forms to coloured squares superimposed onto each other. The arrangement of these squares is carefully calculated so that the colour of each square optically alters the sizes, hues, and spatial relationships of the others. These works were exhibited worldwide and formed the basis of the first solo exhibition given to a living artist at the Metropolitan Museum of Art, New York City, in 1971.

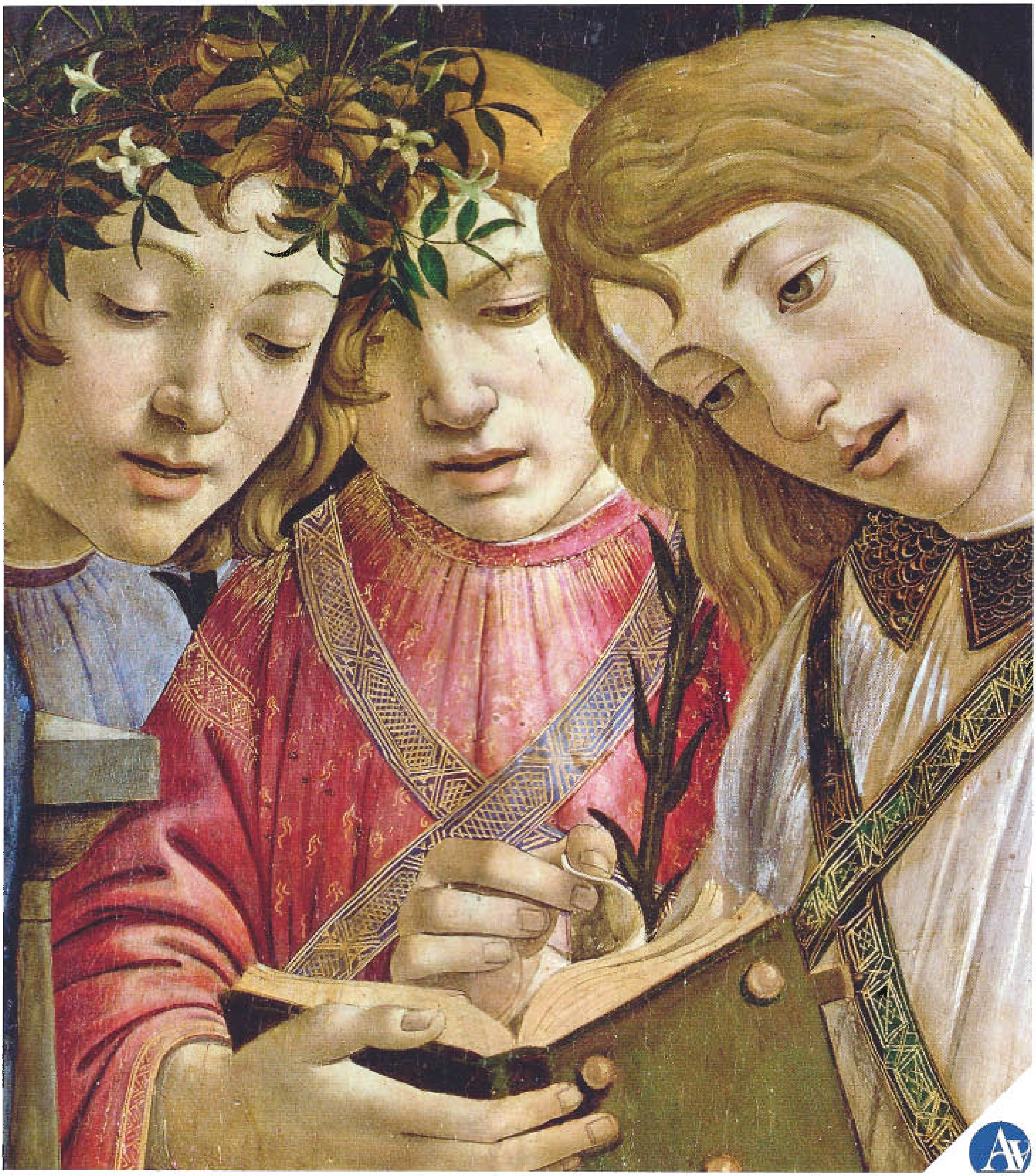
…. La Soprintendenza per i Beni Storici, Artistici ed Etnoantropologici dell'Umbria, in accordo con la Josef and Anni Albers Foundation, propone la prima monografica sulla importante produzione a tema sacro di Joseh Albers. (Marzo – Giugno 2013).
L'artista, che proveniva dalla Bauhaus, incarnava la quintessenza dell'artigiano: devoto all'abilità tecnica, al rigore per gli standard tecnici dei materiali e del loro impiego. Allo stesso tempo era uomo profondamente immerso nel trascendente, intensamente religioso. Di qui, appunto, il sottotitolo della mostra a lui dedicata: Spiritualità e Rigore.



LUOGHI DELL' INFINITO

maggio 2013 173

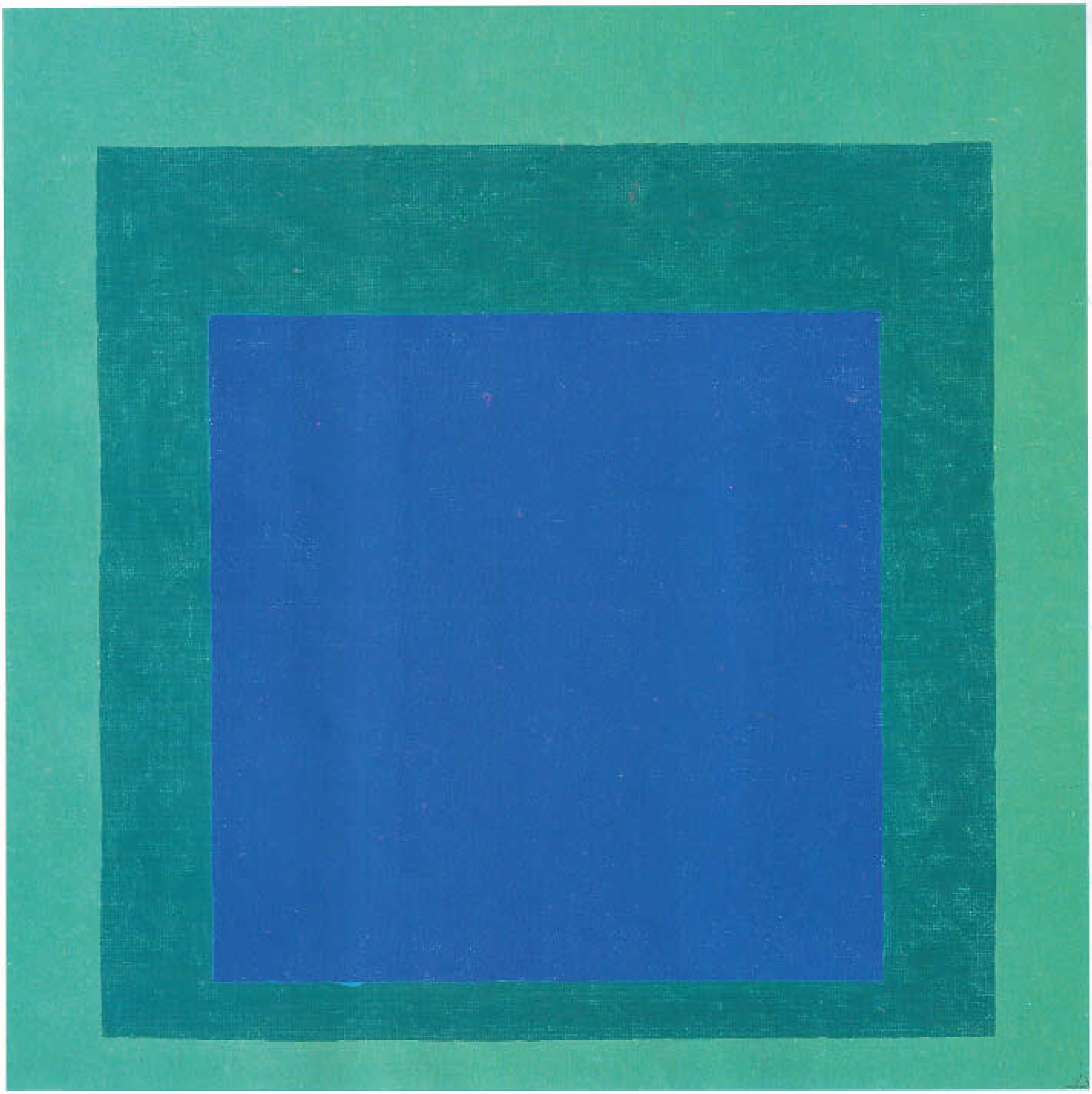
MENSILE DI ITINERARI ARTE E CULTURA – Anno XVII – Sped. A.P. D.L. 353/2003, conv. L. 46/2004 art. 1 c.1. LO/MI Non può essere distribuito separatamente dal numero odierno del quotidiano Avvenire + Luoghi dell'Infinito € 4,00



Speciale
BIBBIA, IL CODICE DEI CODICI

I luoghi, le parole
Sulle orme di papa Francesco

Josef Albers
I colori dello spirito



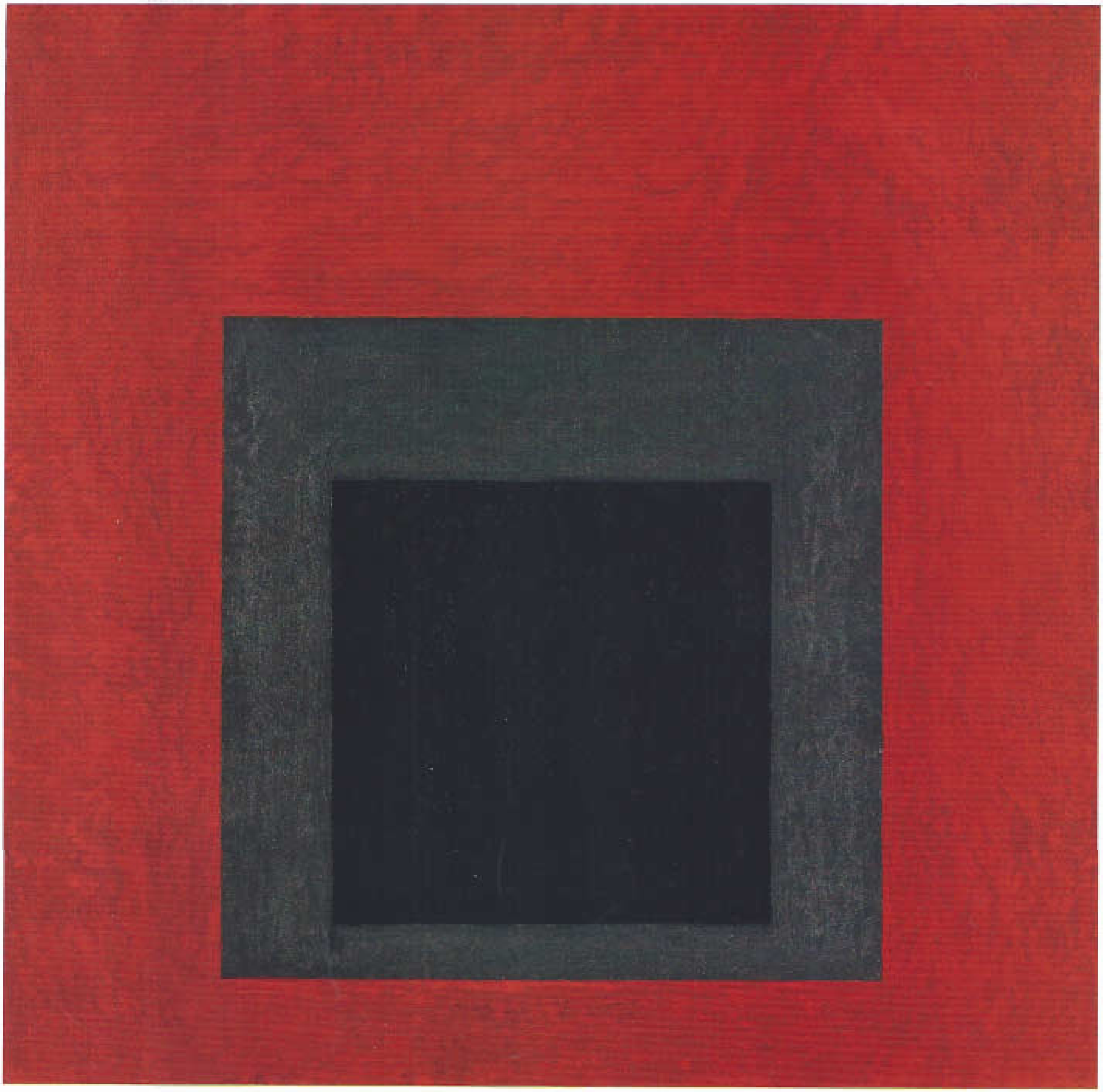
LE AVVENTURE SPIRITUALI DEL MAESTRO ALBERS

Una doppia mostra in Umbria narra l'impegno didattico del pittore dal Bauhaus agli Stati Uniti. E al tempo stesso la sua sete di assoluto

testo di **Beatrice Buscaroli**

Il viaggio per nave che nel 1933 lo aveva condotto a New York doveva essere stato pieno di insidie, se, come raccontano, molti dei progetti su vetro realizzati in Germania si erano infranti irrimediabilmente.

Josef Albers, con la moglie Anni, si sta recando in Carolina del Nord, chiamato a dirigere un'istituzione appena inaugurata: il Black Mountain College. Niente a che vedere con il Bauhaus appena costretto a chiudere dopo l'ultima, breve parentesi berlinese. Si tratta di una scuola di "arti liberali", ispirata ai principi cari a John Dewey: le arti visive incontrano i principi della progettazione, la letteratura dialoga con la scenografia, la poesia interseca la musica. Non parla una parola di inglese, ma a chi gli domanda quale sia il compito di una scuola di questo tipo risponde: «Aprire gli occhi». La funzione di un processo di formazione che investe le "arti" non può che essere quello di permettere agli studenti di "aprire gli occhi", di confrontarsi, di dialogare, di sbagliare, di riprendere il cammino con il solo conforto che ogni operazione, ogni progetto, ogni opera, altro non sono che un veicolo, uno strumento per conoscere meglio il mondo nel quale siamo calati.



Ne era del tutto consapevole Walter Gropius, inventore del Bauhaus, che nel 1925 lo volle come docente dell'istituto appena trasferito da Weimar a Dessau. Gropius lo considerava non solo uno studente di grande valore, ma anche uno straordinario didatta, un soggetto capace di riflettere sulle finalità originali e di mettere mano all'organizzazione interna della scuola. Ne sarebbe stato consapevole, con ammirazione devota, Robert Rauschenberg, suo studente al Black Mountain College: «Un uomo dal pessimo carattere, ma il miglior insegnante che abbia mai avuto».

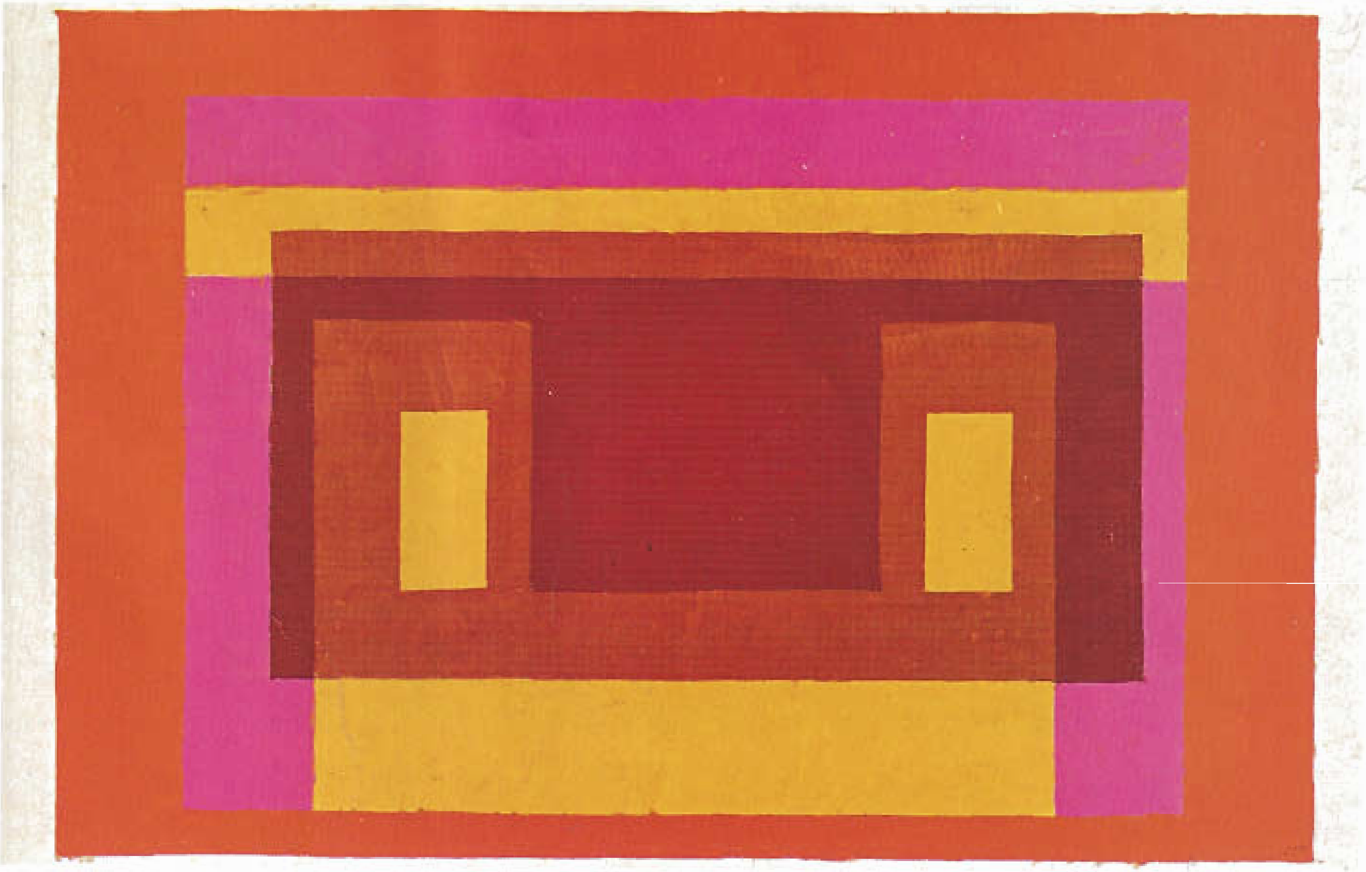
Ebbene, quest'uomo dal profilo tagliente, quasi mai ritratto nell'atto di sorridere, vagamente severo, nasce a Bottrop nel 1888, una città vicina ai confini con l'Olanda. Studia pittura a Berlino, a Essen, a Monaco. Arriva al Bauhaus già maturo dunque, nel 1920, dove approfondisce la sua attenzione per il vetro, un medium versatile che può essere impiegato all'interno della progettazione architettonica, ma anche come elemento decorativo "astratto", all'interno del quale giocare nuove configurazioni dei rapporti cromatici. Nasce un'attenzione nei confronti del colore che non verrà più abbandonata: niente a che vedere con il misticismo esoterico di Johannes Itten e nemmeno con il simbolismo antroposofico di Vasilij Kandinskij: forse l'influenza maggiore è quella di Paul Klee, la sua interrogazione sulle qualità dei contrasti cromatici, la sua indagine analitica sulle interazioni dei colori.

Colore e composizione diventano gli strumenti per generare strutture armoniche razionali e ordinate. Con la consapevolezza, tuttavia, che nessuna teoria della composizione conduce di per sé a produrre musica o arte, che nessuna teoria del colore e delle armonie sia sufficiente a realizzare un quadro. Albers sa molto bene che continuare a distinguere tra "arti pure" e "arti applicate" è diventata una pratica insostenibile nell'età della tecnica.

Agli studenti amava dire che per poter usare il colore è indispensabile sapere che esso inganna di continuo. Nel 1928, al Bauhaus, Albers spiega metodi e obiettivi del *Vorkurs*, del corso propedeutico seguito da tutte le "matricole": «L'esperienza personale è l'insegnamento più efficace. La sperimentazione consente risultati irraggiungibili con lo studio, e cominciare con il gioco dà buon animo e conduce senza sforzo alla costruzione inventiva e alla scoperta. Il fine è l'invenzione».

Questo gioco della creatività non abbandona mai l'Albers didatta, l'Albers impegnato nella pratica dell'insegnamento: dal Bauhaus al Black Mountain College fino alla Yale. Al dipartimento di design della Yale prende corpo la sua ultima, intima e ossessiva utopia: l'omaggio al quadrato. È allora che si concentra sulla sua pittura, una forma semplice, elementare, dove l'insidia del colore pare risolversi. I colori sono sensazioni e, come ogni sensazione, risultano ambigui. Sapendo esaltare le proprie qualità percettive in virtù dell'interazione che li sa disporre e comporre. Un "gioco" semplice, ma difficile a farsi. Come ogni avventura spirituale. Un'avventura che, in ogni caso, richiede tutta la nostra applicazione, tutta la nostra capacità di "aprire gli occhi".

"Josef Albers. Spiritualità e rigore", a cura di Nicholas Fox Weber e Fabio De Chirico. Perugia, Galleria Nazionale dell'Umbria, corso Vannucci, 19. Fino



al 19 giugno. Catalogo Silvana. Orari: 10.30-19.30. Info: 07558668415, gallerianazionaleumbria.it.

"Josef Albers. Arte come esperienza", Città di Castello, Pinacoteca Comunale, via della Cannoniera, 22/a, a cura di Nicholas Fox Weber e Fabio De Chirico. Fino al 19 giugno. Catalogo Silvana. Orari: 10-13, 14.30-18.30, lunedì chiuso. Info: 0758554202, cdcnet.net/pinacoteca.

Beatrice Buscaroli

A pagina 65,
Croce bianca (1937),
olio su masonite.
Alle pagine precedenti, da sinistra,
Omaggio al quadrato (1952),
olio su masonite;
Omaggio al quadrato (1968),
olio su masonite.

In queste pagine, da sinistra,
Variant/Adobe (1948), olio e grafite su carta assorbente;
Proto Form A (1937),
olio su masonite
(per tutte le immagini,
© The Josef and Anni Albers Foundation).